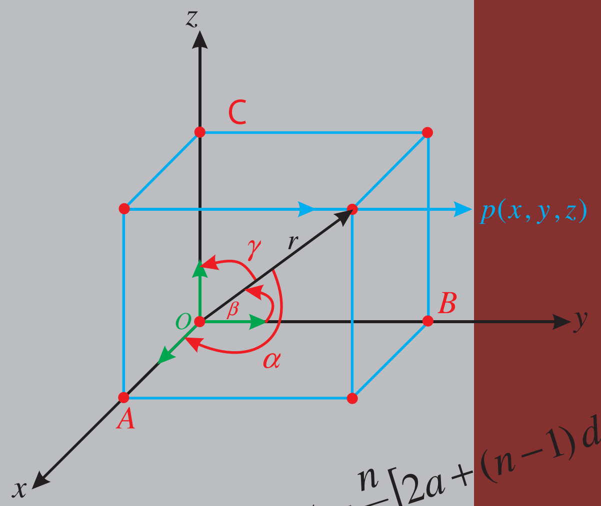
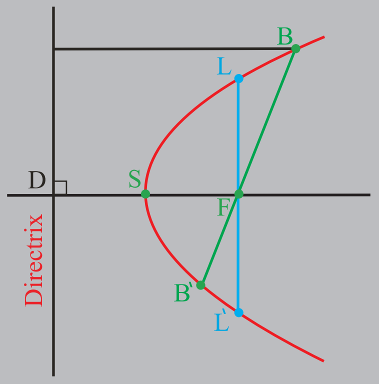
د پوهنې وزارت

ریاضي ۱۱

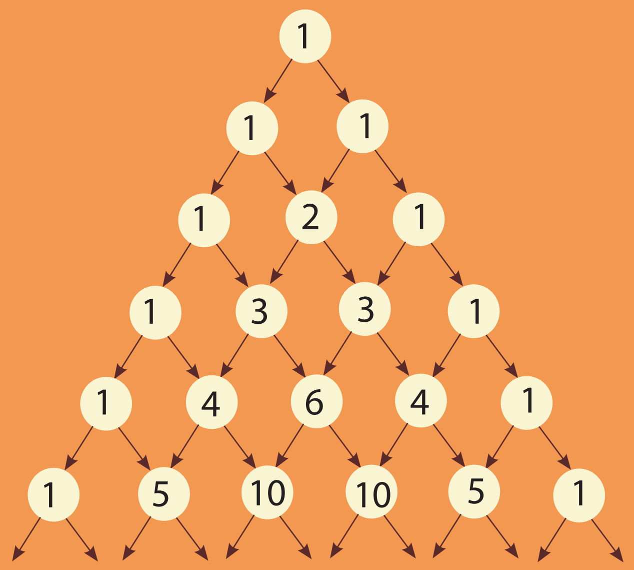
ټولګی



$$S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$



ریاضي ۱۱ ټولګی



د چاپ کال: ۱۳۹۸

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، ګوجر دي پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم

د پوهنې وزارت

ریاضي ۱۱ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هـ. ش.

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي

مؤلفين: د تعليمي نصاب د رياضياتو د څانګې علمي او مسلكي غړي

اډيټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډيټ علمي او مسلكي غړي

ټولګی: يوولسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي كتابونو د تأليف لوی رياست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوي رياست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

برېښنالیک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي كتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې يې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلند کيږي.

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراګانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږګوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وګړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

لړلیک

سرلیک	مخونه
لومړی څپرکی مخروطي مقاطع	
• مخروطي مقاطع	۳
• بیضوي	۵
• د بیضوي معادله	۹
• د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي	۱۳
• پارابولا	۱۷
• د پارابولا معادله	۱۹
• د هغې پارابولا معادله چې راس یې یو اختیاري ټکی وي	۲۳
• هایپربولا	۲۷
• د هایپربولا معادله	۲۹
• د هغې هایپربولا معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي	۳۳
• د مستقیم خط موقعیت نظرمخروطي مقاطعو ته	۳۷
• د څپرکي مهم ټکي	۴۱
• د څپرکي پوښتني	۴۴
دویم څپرکی مثلثات	
• د ساین قانون	۴۹
• د کوساین قانون	۵۵
• د تانجنټ قانون	۵۹
• مثلثاتي مطابقتونه	٦۳
• مثلثاتي معادلې	٦۹
• دویمه درجه مثلثاتي معادلې	۷۵
• د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو یا سیستمونوحل	۷۹
• د څپرکي مهم ټکي	۸۹
• د څپرکي پوښتني	۹۱

دریم څپرکی فضايي هندسه

- اساسي مفاهيم او اکسيومونه ۹۵
- په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي ۹۷
- په فضا کې موازي مستقيمونه ۱۰۱
- په فضا کې د دوو مستقيمو کرښو تر منځ زاويه ۱۰۳
- په فضا کې موازي مستقيمونه او موازي مستوي‌گانې ۱۰۵
- په فضا کې متعامدې مستقيمې کرښې او مستوي‌گانې ۱۰۷
- په فضا کې موازي مستوي‌گانې ۱۰۹
- د څپرکي مهم ټکي ۱۱۱
- د څپرکي پوښتنې ۱۱۳

څلورم څپرکی ترادفونه

- ترادفونه ۱۱۷
- حسابي ترادف ۱۱۹
- هندسي ترادف ۱۲۷
- د ترادفونو قسمي مجموعه ۱۳۳
- د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسمي مجموعه ۱۳۷
- د يوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل ۱۴۱
- لايتناهي هندسي سلسلې ۱۴۳
- د څلورم څپرکي مهم ټکي ۱۴۷
- د څپرکي پوښتنې ۱۴۹

پنځم څپرکی لوګاريتم

- اکسپوننشيل تابع ګانې ۱۵۳
- لوګاريتم ۱۵۷
- لوګاريتمي تابع ګانې ۱۵۹
- معمولي لوګاريتم ۱۶۳
- د لوګاريتم قوانين ۱۶۷
- د لوګاريتم د قاعدې اړول په بله قاعده ۱۷۱
- کرکټرستيک او مانتيس ۱۷۵
- د لوګاريتم جدول ۱۷۹
- انتي لوګاريتم ۱۸۳
- خطي انټرپولېشن ۱۸۵
- د لوګاريتمي او اکسپوننشيل معادلو حل ۱۸۹
- درياضيکي عمليو سرته رسولو کې له لوګاريتم څخه کار اخيستنه ۱۹۳
- د څپرکي مهم ټکي ۱۹۷
- د څپرکي پوښتنې ۱۹۹

شپږم څپرکی متریکسونه

- متریکسونه ۲۰۵
- د متریکسونو ډولونه ۲۰۹
- د متریکسونو جمع او تفریق ۲۱۳
- په متریکس کې د سکالر ضرب ۲۱۵
- د دوو متریکسونو ضرب ۲۱۷
- د یوه متریکس ترانسپوز متریکس ۲۲۱
- دیترمینانت ۲۲۳
- د دیترمینانت خاصیتونه ۲۲۷
- د 2×2 مرتبې متریکسونو ضربي معکوس ۲۲۹
- له معکوس متریکس څخه په کار اخېستنې د خطي معادلو د سیستم حل ۲۳۱
- د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه ۲۳۵
- د معادلو د سیستم حل د ګوس(Gouse) په طریقه ۲۳۹
- د شپږم څپرکي مهم ټکي ۲۴۳
- د څپرکي پوښتنې ۲۴۵

اووم څپرکی وکتورونه

- د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه ۲۴۹
- د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی ۲۵۱
- وکتورونه په سطح او فضا کې ۲۵۳
- په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات ۲۵۵
- د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه ۲۵۹
- د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل ۲۶۱
- د وکتوري ضرب حاصل ۲۶۵
- د څپرکي مهم ټکي ۲۷۵
- د څپرکي پوښتنې ۲۷۷

اتم څپرکی احصایه

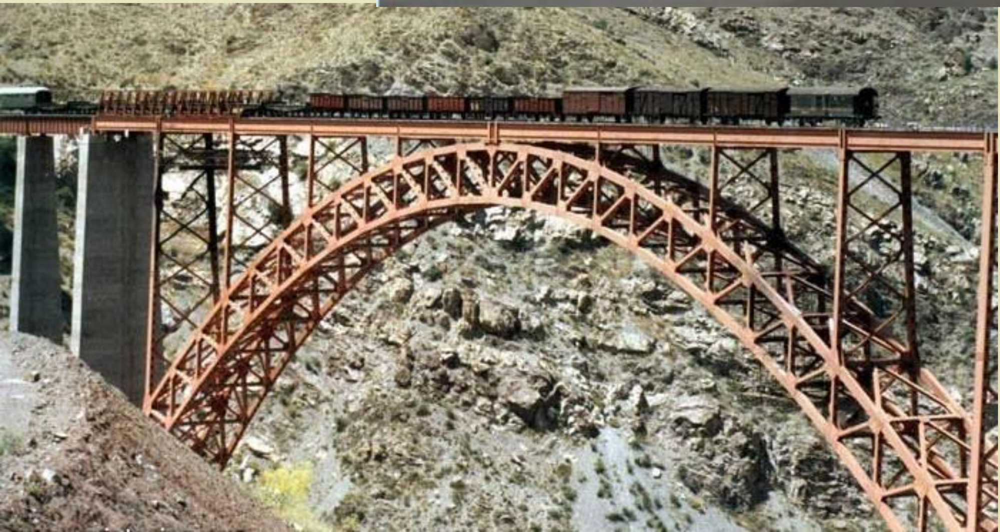
- دبدلونونو ضریب ۲۸۱
- په نورمال منحني کې تيتوالی ۲۸۳
- دنورمال توزيع دډول شاخصونه ۲۸۵
- څو متحوله ټولنې ۲۸۷
- د تيتوالي گراف ۲۸۹
- پيوستون او دپيوستون ضريب ۲۹۱
- د خطي ميلان معادله ۲۹۵
- د اتم څپرکي مهم ټکي ۲۹۹
- د څپرکي پوښتنې ۳۰۱

نهم څپرکی احتمالات

- پرموټېشن يا ترتيب ۳۰۵
- ترکيب يا کمبينيشن ۳۰۹
- ترکيب ۳۱۱
- تبديل ۳۱۳
- د بينوم قضيه ۳۱۷
- دوه جمله يي احتمال ۳۱۹
- د څپرکي مهم ټکي ۳۲۲
- د څپرکي پوښتنې ۳۲۳

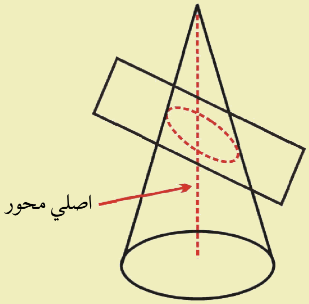
لومړی څپرکی

مخروطي مقاطع



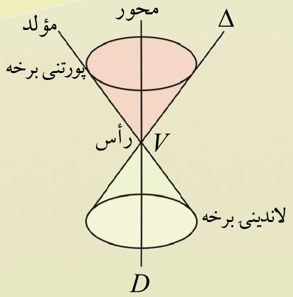
مخروطي مقاطع

sections of Conic



آیا ویلای شئ چې د یوې مستوي او مخروط د تقاطع له ګډ فصل څخه څه ډول منحني ګانې لاس ته راځي.

د مخروطي مقاطعو تعریف



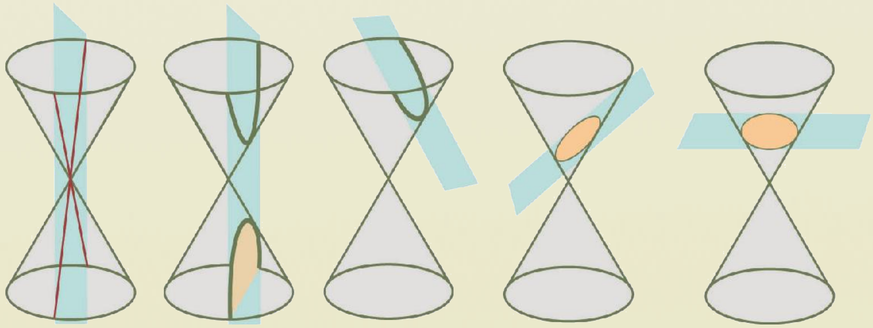
د Δ او D دوه مستقیم خطونه داسې په پام کې نیسو چې یو بل د v په ټکي کې قطع کړي. که چیرې د D خط ثابت او د Δ خط د هغه په چاپیر وڅرخېږي، له دې څرخولو څخه په فضا کې دوه شکلونه چې یو یې د v (ټکی) پورته او بل یې د v د ټکي ښکته خواته جوړېږي. هر یو یې مخروط دی، لکه: مخامخ شکل د D مستقیم خط د مخروط اصلي محور او د Δ مستقیم خط د هغه مولد دی.

د یوې مستوي په واسطه د یوه مخروط قطع کول مختلف حالتونه لري چې مختلفي منحني ګانې منځ ته راځي چې مخروطي مقاطع بلل کېږي. په راتلونکې کې به هر یو په تفصیل سره ولوستل شي.

فعالیت

- یو مخروط د مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط په اصلي محور باندې عمود او یا له قاعدو سره موازي وي، ویلاي شئ، ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي نسبت د مخروط اصلي محور ته مایله وي، ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط له مولد سره موازي وي، نوتقاطع یا ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- دوه مخروطه چې راسونه یې سر په سر (منطبق) او قاعدې یې موازي وي، د یوې مستوي په واسطه چې اصلي محور سره موازي وي قطع کړئ. ویلای شئ چې له ګډ فصل څخه یې څه ډول منحني په لاس راځي؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط اصلي محور په بر کې ولري، تقاطع یا ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:



پایله:

- که چېرې مستوي یو مخروط داسې قطع کړي چې مستوي د مخروط په اصلي محور عمود او یا موازي له قاعدو سره وي، نو لاس ته راغلی شکل یې یوه دایره(Circle) ده.
- که چېرې مستوي مخروط داسې قطع کړي چې مستوي نسبت د مخروط اصلي محور ته مایل وي، نو لاس ته راغلی شکل بیضوی (Ellipse) ده.
- که چېرې یوه مستوي یو مخروط داسې قطع کړی وي چې اصلي محور ته موازي اما هغه په برکې ونه لري، نو په دې حالت کې د هغوی له لاس ته راغلي شکل څخه پارابولا (Parabola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي دوه څوکې په څوکې مخروطونه داسې قطع کړي چې د مخروط له اصلي محور سره موازي وي خو هغه په ځان کې ونه لري نو، له لاس ته راغلي شکل څخه یې هایپربولا (Hyperbola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي سطحه اصلي محور په برکې ولري، نو لاس ته راغلی شکل یې له دوو متقاطع خطونو څخه عبارت دی چې هر یو یې په پورته شکلونو کې ښودل شوی دي.

پوښتنې

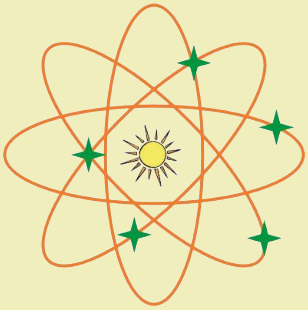
1- پورتني شکل ته په کتو سره، د مستوي او مخروط هغه متقاطع حالت رسم کړئ چې ګډ فصل یې یوه دایره او یا یو ټکی وي.

2- که چېرې یوه مستوي دوه څوکې په څوکې مخروطونه داسې قطع کړي چې د دواړو مخروطونو اصلي محورونه په برکې ولري، ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

3- د یوې مستوي او یو مخروط ګډ فصل په کوم حالت کې یوه کرښه ده؟ په شکل کې یې وښیی؟

بيضــوي

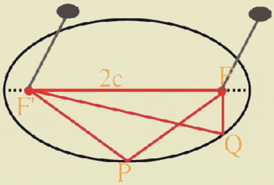
Ellipse



د سيارو حرکت د لمريز نظام په شاوخوا څه ډول منحني ګاڼي جوړوي؟

فعاليت

- د ميز پر سر د يوې سپينې کاغذي پاڼې پر مخ دوه ستنې په يوه معين او ثابت واټن سره د F او F′ پـه دوو ټکـو کې وټومبئ.
- د يو تار څوکه چې اوږدوالی يې د دوو ستنو ترمنځ د فاصلې څخه زيات يا د $\overline{FF'} = 2c$ وي، په دواړو ستنو کې وتړئ، لاندې شکل تـه پـه کتـو سره يو پنسل د تار په غاړه د ستنو په شاوخوا وخرخوئ.



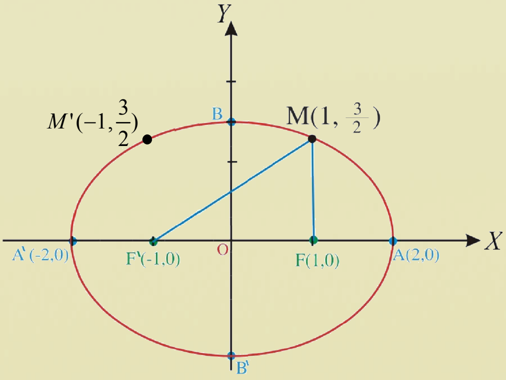
- هغه شکل چې له يوې بشپړې دورې څخه په لاس راځي څه ډول منحنی ده؟

له پورته فعاليت څخه لاندې پايله بيانولای شو:

پايله: هغه شکل چې ددوو ستنو تر منځ د معين او ثابت واټن پـه انـدازه د تـار پـه غـاړه د پنسل لـه خرخولـو څخـه پـه لاس راځي، بيضوي بلل کيږي، د F او F′ ټکي د بيضوي د محراقونو په نامه ياديږي.

فعاليت

- پــه مخــامخ شــکل کــې د F،F′، M،M′، A′ او A ټکو مختصات درکړل شوي، د دوو ټکو تـرمنځ د فاصلې د پيـداکولـو لـه فـارمول څخـه پـه کـار اخيـستنې د $|MF'|$، $|MF|$ او $|AA'|$ اوږدوالـی پيـدا کـړئ او د $|MF| + |MF'|$ جمع حاصل لاس تـه راوړئ او د $|AA'|$ اوږدوالی سره يې پرتله کړئ.



- د $M'(-1,\frac{3}{2})$ ټکی د بیضوي په محیط باندې وټاکئ او پورتنی ذکر شوې مرحلې د M' په ټکی باندې تطبیق کړئ. همدارنگه د M ټکی هم په پام کې ونیسئ.
- وروسته د $|M F'| + |M F|$ او $|M' F| + |M' F'|$ قیمتونه یو له بله سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

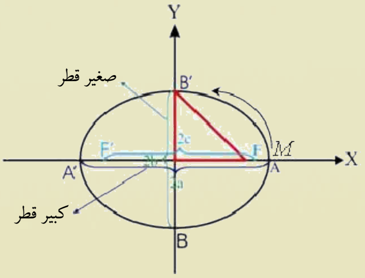
تعریف: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو ثابتو ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل تل مساوي یا ثابت اوږدوالی $(2a)$ ولري، بیضوي بلل کېږي، مستقر ټکی چې په F او F' تورو ښودل شوی، د بیضوي محراقونه او A', A د بیضوي راسونه چې $AA' = 2a$ ثابت اوږدوالی دی.

$$|M' F| + |M' F'| = 2a \quad , \quad |M F| + |M F'| = 2a$$

نو:

$$|M' F| + |M' F'| = |M F| + |M F'| = 2a$$

د بیضوي قطرونه او راسونه



بیضوي بې شمېره قطرونه لري، تر ټولو اوږد قطر یې چې له محراقونو څخه تېرېږي او بیضوي په دوو ټکو (A او A') کې قطع کوي، د کبیر قطر (Major axis) په نامه او ترټولو لنډ قطر یې چې د FF' د تنصیف په ټکي باندې عمود دی، د صغیر قطر (Minor axis) په نامه یادېږي. د A, A' او B, B' ټکي د بیضوی راسونه دي، کبیر قطر په $A A'$ چې اوږدوالی یې $AA' = 2a$ او صغیر قطر په BB' چې اوږدوالی یې $BB' = 2b$ دی، ښودل کېږي.

یاددښت

که چېرې د M ټکی د صغیر قطر په یوه راس باندې یعنې په B یا B' باندې منطبق شي، په دې صورت کې، په پورته شکل کې: $\overline{MF} = \overline{MF'}$ سره کیږي.

د بیضوی له تعریف څخه پوهېږو چې:

$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$2\overline{MF} = 2a$$

$$\overline{MF} = a$$

د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه

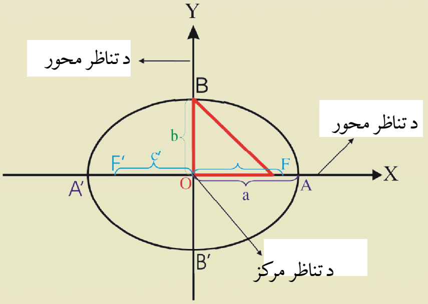
د محراقونو او قطرونو ترمنځ اړیکي د فیثاغورث د قضیې له مخې لیکلای شو:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

د بیضوي تناظري مرکز او تناظري محور

بیضوي دوه تناظري محورونه لري، یو یې اوږد محور چې د AA' پر قطر باندې منطبق دی، محراقي محور هم بلل کېږي او بل یې لنډ محور چې د BB' پر قطر باندې منطبق دی، تناظري محور په نامه یادېږي.

د دې دواړو تناظري محورونو د تقاطع ټکی د بیضوي تناظري مرکز بلل کیږي او په (O) سره ښودل کیږي.



$$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$$
$$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$$
$$\overline{OF} = \overline{OF'} = c$$

عن المرکزیت (Eccentricity): د محراقونو د اوږدوالي او د کبیر قطر د اوږدوالي نسبت ته عن المرکزیت وایي چې د یوې بیضوي شکل د هغه په واسطه ټاکل کیږي ، د بیضوي عن المرکزیت په e سره ښودل کیږي.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

پوهیږو چې په هره بیضوي کې $0 < c < a$ دی، نو $0 < e < 1$ کیږي، ولې؟

د بیضوي د عن المرکزیت او قطرونو تر منځ داسې رابطه $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ده، د $e = \frac{c}{a}$ د رابطې په کارولو سره هغه لاس ته راوړئ.

يادونه: که چيرې د e قيمت صفر ته نژدې شي، محراقونه د مرکز خوا ته نژدې کېږي او بيضوي تقريباً دايروي شکل غوره کوي. که چيرې e د 1 عدد ته نژدې شي، په دې صورت کې محراقونه د قطرونو د راسونو خواته نژدې کېږي چې يو اوږد شکل غوره کوي، د بيضوي د ډېرو مسايلو په حل کې د عن المرکزيت څخه کار اخيستل کېږي.

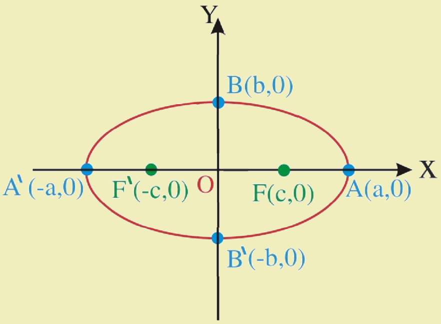
پوښتنې

1 – که چيرې په بيضوي کې د کبير او صغير قطر اوږدوالی يو له بل سره مساوي وي، څه ډول منحني په لاس راځي؟

2 – که چيرې د بيضوي عن المرکزيت $\frac{2}{3}$ وي، په دې صورت کې د کبير قطر او صغير قطر نسبت پيدا کړئ.

د بیضوي معادله

آیا د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، پیدا کولای شئ؟

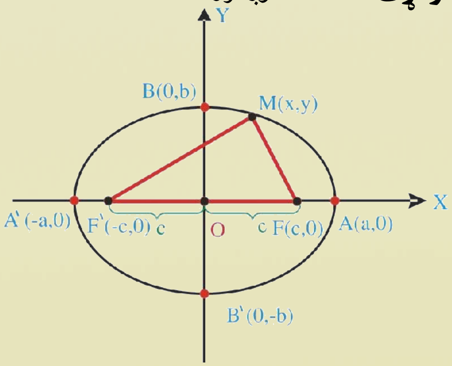


فعالیت

- داسې بیضوي رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي او محراقونه یې د x د محور په مخ وټاکئ.
- د $M(x,y)$ یو اختیاري ټکی، د بیضوي پر محیط باندې وټاکئ او هغه له محراقونو سره ونښلوئ.
- د بیضوي د تعریف رابطه نظر د M ټکي ته ولیکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې د MF او MF' اوږدوالی پیداکړئ او دهغه په اساس د بیضوي معادله په لاس راوړئ.

د بیضوي د معادلې ثبوت

لومړی حالت: موږ لرو:



$$|MF|+|MF'|=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$(\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2=(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$

د دواړو خواوو له مربع کولو وروسته لیکو چې:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2-4a^2-x^2-2cx-c^2-y^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$-4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\quad /\div(-4)$$

یا $a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

د پورته رابطې دواړه خواوې بیا مربع کوو او لیکو:

$$(a^2+cx)^2=(a\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2[(x+c)^2+y^2]$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$a^4+c^2x^2-a^2x^2-a^2c^2-a^2y^2=0/(-1)$$
$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2-c^2x^2-a^4=0$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

څرنګه چې $a^2=b^2+c^2$ دي، نو $b^2=a^2-c^2$ کېږي، په دې صورت کې پورته معادله په لاندې توګه لیکو:

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad / \div a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \qquad a>b$$

د بیضوي په پورته معادله کې a د کبیر قطر نیمایي او b د صغیر قطر نیمایي دی چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مرکز کې او محراقي محور یې د x پرمحور دی.

د کبیر او صغیر قطر د راسونو او د محراقونو مختصات عبارت وي له:

$$\begin{cases}A(a،\ 0)\\ A'(-a,0)\end{cases} \qquad \begin{cases}B(0،b\ )\\ B'(0،\ -b)\end{cases} \qquad \begin{cases}F(c،\ 0)\\ F'(-c،\ 0)\end{cases}$$

دویم حالت: که چېرې د بیضوي محراقونه د y په محور باندې وي، په دې صورت کې د بیضوي معادله عبارت ده له: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$

د هغه ګراف رسم او د اوږد قطر، لنډ قطر د راسونو او محراقونو مختصات یې ولیکې.

لومړی مثال: که چېرې د بیضوي اوږد قطر د y پر محور باندې او اوږدوالی یې $|AA'|=6$ او د لنډ قطر اوږدوالی یې $|BB'|=4$ واحده وي، د بیضوي معادله پیدا کړئ.

حل:
$$|AA'|=2a=6 \Rightarrow \ a=3$$
$$|BB'|=2b=4 \quad \Rightarrow \ b=2$$

اوس د a او b قیمتونه په عمومي معادله کې ایږدو: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

دویم مثال:که چیرې اوږد قطر د x پر محور او اوږدوالی یې $|AA'|=10$ او د لنډ قطر اوږدوالی یې $|BB'|=8$ واحده وي، د بیضوي د اوږده او لنډ قطرونو د راسونو او محراقونو مختصات، محراقي فاصله، د عن المرکزیت قیمت پیدا او گراف یې رسم کړئ.

حل: پوهیږو چې:

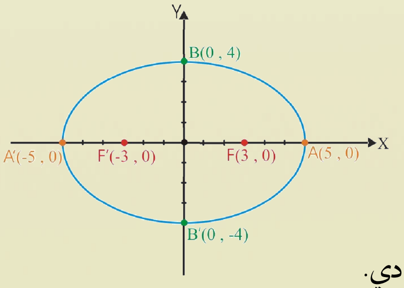
$$|AA'|=2a=10 \quad \Rightarrow \quad a=\pm 5$$
$$|BB'|=2b=8 \quad \Rightarrow \quad b=\pm 4$$

د اوږده قطر د راسونو مختصات له $A(5,0)$ او $A'(-5,0)$ څخه عبارت دي.

د لنډ قطر د راسونو مختصات له $B(0,4)$ او $B'(0,-4)$ څخه عبارت دي.

د محراقونو د مختصاتو د پیداکولو لپاره د c قیمتونه پیداکوو:

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow (5)^2=(4)^2+c^2$$
$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 5^2-4^2=25-16=9$$
$$c=\pm 3$$



د محراقونو مختصات له $F(3,0)$ او $F'(-3,0)$ څخه عبارت دي.

عین المرکزیت: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}$ دی.

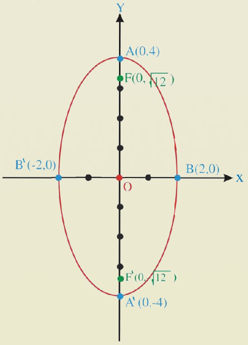
دریم مثال: د داسې بیضوي گراف رسم کړئ چې معادله یې $4x^2+y^2=16$ وي، د راسونو او محراقونو مختصات یې پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په 16 ویشو او لاندې معادله لاس ته راځي:

$$\frac{4x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{16}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

د راسونو مختصات:

$$a^2=16 \quad \Rightarrow \quad a=\pm 4 \quad \Rightarrow \quad A(0، 4) \;،\; A'(0 \;،\; -4)$$
$$b^2=4 \quad \Rightarrow \quad b=\pm 2 \quad \Rightarrow \quad B(2، 0) \;،\; B'(-2 \;،\; 0)$$



د محراقونو مختصات:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = (4)^2 - (2)^2$$
$$c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = \pm\sqrt{12}$$
$$F(0,\sqrt{12}),\ F'(0,-\sqrt{12})$$

خلورم مثال:د بیضوي د محیط پر مخ د یوه ټکي مختصات $P(2,4)$ او د محراقونو مختصات یې له $F'(-3\sqrt{2},0), F(3\sqrt{2},0)$ څخه عبارت دي. د اوږده او لنډ قطر اوږدوالی یې پیدا کړئ.

حل: د بیضوي د تعریف له مخې لرو چې: $|PF| + |PF'| = 2a \qquad \ldots \text{I}$

د PF او PF′ د فاصلو اوږدوالی پیدا کوو $|PF| = \sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2}$ او $|PF'| = \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2}$

پورتني قیمتونه د I په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2} + \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2a$$
$$\Rightarrow \sqrt{4+12\sqrt{2}+18+16} + \sqrt{4-12\sqrt{2}+18+16} = 2a$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{38+12\sqrt{2}} + \sqrt{38-12\sqrt{2}}\right)^2 = (2a)^2$$
$$38+12\sqrt{2} + 2\sqrt{(38+12\sqrt{2})(38-12\sqrt{2})} + 38 - 12\sqrt{2} = 4a^2$$
$$76 + 2\sqrt{1444-288} = 4a^2 \Rightarrow 76 + 2\cdot 34 = 4a^2$$
$$\Rightarrow 76 + 68 = 4a^2 \Rightarrow 144 = 4a^2 \ /\div 4$$
$$\Rightarrow 36 = a^2 \Rightarrow a = \pm 6$$
$$|AA'| = 2a = 2\cdot 6 = 12$$
$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^2 = 6^2 - (3\sqrt{2}\ )^2 \Rightarrow b^2 = 36 - 9\cdot 2 \Rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$
$$|BB'| = 2b = 2\cdot 3\sqrt{2} = 6\cdot\sqrt{2}$$

پوښتنې

1 – لاندې معادلې په پام کې ونیسئ د اوږده قطر اوږدوالی او د محراقونو ترمنځ فاصله یې پیدا کړئ.

$a)\ \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \qquad b)\ \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

2 – د هغې بیضوي معادله ولیکئ چې عن‌المرکزیت یې 0.8 وي.

د هغې بیضوي معادله چې مرکزيې یو اختیاري ټکی وي

آیا دداسې بیضوي معادله پیداکولای شو چې مرکزیې د وضعیه کمیاتو په مبداکې نه وي؟

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

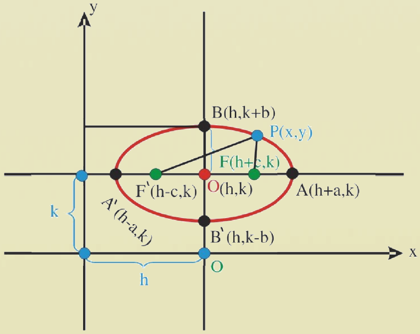
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

فعالیت

- یوه بیضوي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ چې مرکزیې (h,k) اوږد قطریې د x له محور سره موازي وي.
- د $P(x,y)$ یو ټکی د بیضوي په محیط باندې په پام کې ونیسي او هغه له F او F' سره ونښلوئ.
- د بیضوي د مرکز مختصات (h,k) په پام کې نیولو سره د محراقونو F او F'، راسونو A , A' او B,B' وضعیه کمیات په شکل کې وښیاست.

لومړی حالت: د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول او د بیضوي د تعریف څخه په کار اخیستنې سره د بیضوي معادله په لاس راوړو:

د PF او PF' قیمتونه د بیضوي د تعریف په رابطه کې ایږدو.



$$|\overline{PF}|+|\overline{PF'}|=2a$$

$$|\overline{PF}|=\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

$$|\overline{PF'}|=\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\ /(\ )2$$

$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h-c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h-c)+(h-c)^2$$

$$x^2-2hx-2cx+h^2+2hc+c^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2hx+2cx+h^2-2hc+c^2$$
$$4hc-4cx=4(a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2})/\div 4$$
$$hc-cx=a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$
$$c(h-x)-a^2=-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} \quad /\div(-1)$$
$$c(x-h)+a^2=a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو:

$$c^2(h-x)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[\{x-(h-c)\}^2+(y-k)^2]$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[(x-h)+c]^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2-a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$
$$(x-h)^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$
$$-(x-h)^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=-a^2(a^2-c^2)$$

څرنگه چې په بیضوي کې $a^2-c^2=b^2$ کېږي، نو لیکلای شو:

$$-b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=-a^2b^2 \quad / \ \div(-a^2b^2)$$
$$=\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

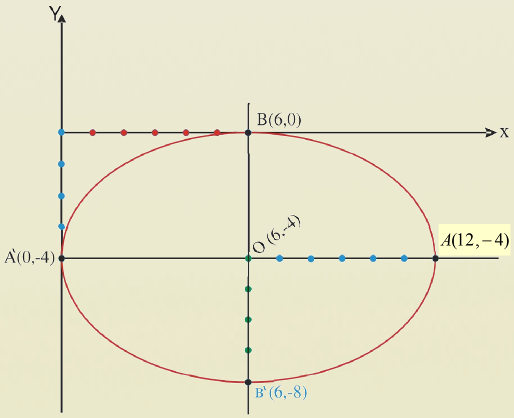
لومړی مثال: د یوې بیضوي د مرکز، محراقونو او اوږد قطر د راسونو مختصات چې معادله یې $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ ده، پیدا او گراف یې رسم کړئ.

حل: څرنگه چې نوموړې معادله عمومي شکل لري، له دې امله د مرکز مختصات یې $(6,-4)$ دي، اوږد محور یې د x له محور سره موازي دی.

$$a^2=36\Rightarrow a=\pm 6$$
$$b^2=16\Rightarrow b=\pm 4$$
$$c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=\pm 2\sqrt{5}$$

د اوږد قطر د راسونو مختصات عبارت دي له:

$$A(h+a\ ,\ k)=A(6+6,-4)=A(12,-4)$$
$$A'(h-a\ ,k)=A'(6-6,-4)=A'(0,-4)$$



د تناظري محور د راسونو مختصات عبارت دي له:

$$B(h,k+b)=B(6,-4+4)=B(6,0)$$

$$B'(h,k-b)=B'(6,-4-4)=B'(6,-8)$$

د محراقونو مختصات عبارت دي له:

$$F(h+c,k)=F(h+c,k)=(6+2\sqrt{5},-4)$$

$$F'(h-c,k)=F'(h-c,k)=(6-2\sqrt{5}\ ,-4)$$

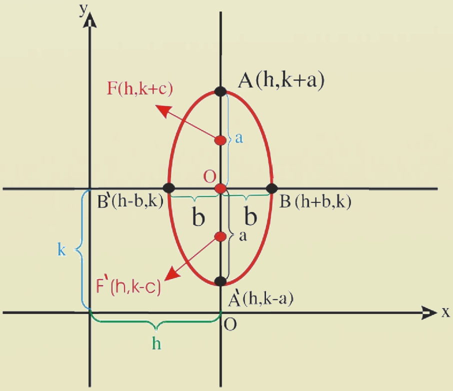
دويم حالت: كه چېرې محراقي محور د y له محور سره موازي وي، په دې حالت کې معادله لاندې بڼه غوره کوي.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$$A(h\ ,\ k+a)\ ,\ \ A'(h,k-a)$$

$$B'(h-b\ ,k)\ ,\ \ B(h+b,k)$$

$$F'(h,k-c)\ \ ,\ \ F(h\ ,k+c)$$



يادونه: د $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ معادله هم د بيضوي عمومي معادله ده، په داسې حال کې چې $A\neq C$ او هم علامه وي، يعنې $A>0\ ,\ C>0$ يا $A<0\ ,\ C<0$

دويم مثال: د $16x^2+25y^2-64x+50y-311=0$ معادله د بيضوي د معياري معادلې په ډول وليکئ.

حل: د مربع له بشپړولو څخه په کار اخيستنې سره يې په معياري ډول بدلوو .

$$16x^2+25y^2-64x+50y=311$$

$$16(x^2-4x)+25(y^2+2y)=311$$

$$16(x^2-4x+4-4)+25(y^2+2y+1-1)=311$$

$$16[(x-2)^2-4]+25[(y+1)^2-1]=311$$

$$16(x-2)^2-64+25(y+1)^2-25=311$$

$$=16(x-2)^2+25(y+1)^2=311+64+25$$

$$16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$$

د پورته معادلې دواړه خواوې په 400 ویشو: $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$

پورتنۍ معادله د داسې بیضوي معادله ده چې مرکز يې د $(2،-1)$ ټکی دی.

دریم مثال: د بیضوي لاندې معادله د معیاري معادلې په ډول ولیکئ.

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$

حل : لومړی معادله ترتیب بیا د مربع له بشپړولو څخه په کار اخیستنې سره هغه په معیاري شکل بدلوو:

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$
$$x^2+4x+9(y^2-2y)-23=0$$
$$x^2+4x+(2)^2-(2)^2+9[y^2-2y+(1)^2-(1)^2]-23=0$$
$$\underbrace{x^2+4x+(2)^2}_{\text{کامله مربع}}-(2)^2+9\underbrace{\left[y^2-2y+(1)^2\right]}_{\text{کامله مربع}}-9-23=0$$

$$(x+2)^2-4+9(y-1)^2-9-23=0$$
$$(x+2)^2+9(y-1)^2-36=0$$
$$(x+2)^2+9(y-1)^2=36$$

د مساواتو دواړه خواوې په 36 ویشو:

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=\frac{36}{36}$$
$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

پوښتنې

1. د لاندې هر یوه بیضوي په معادلو کې د مرکز، محراقونو، راسونو مختصات او د کبیر قطر اوږدوالی پیدا کړئ.

$a)\quad \dfrac{(x+3)^2}{2}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1 \qquad\qquad b)\quad x^2+2y^2+4x-12y+20=0$

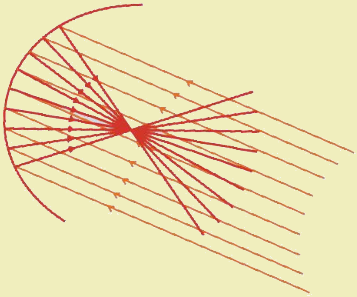
2. د داسې بیضوي معادله ولیکئ چې مرکز يې د $(1,2)$ ټکی، محراق يې د $(6\ ,2)$ ټکی وي او د $(4,6)$ له ټکي څخه تېره شي.

3. د بیضوي لاندې معادلې د معیاري معادلو په ډول ولیکئ، د مرکز، راسونو، محراقونو وضعیه کمیات او د اوږده قطر، لنډ قطر اوږدوالی، عن المرکزیت پیدا او ګرافونه يې رسم کړئ.

$a)\quad 9x^2+25y^2-36x-150y+36=0 \qquad\qquad b)\quad 16x^2+4y^2+96x-8y+84=0$

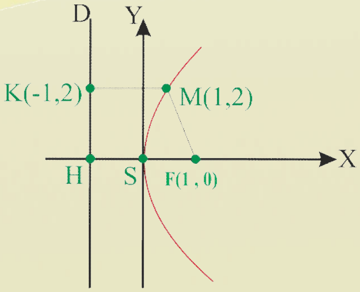
پارابـولا

Parabola



که چېرې د لمر وړانګې په يوې معقرې عدسـيې ولـوېږي، انعکاسـي وړانګې يې له کوم ټکي څخه تېرېـږي؟ دغه ټکـی څـه نـومېږي او د عدسې ګډ فصل له يوې متقاطع مستوي سره چې د عدسـيې اصلـي محور په بر کې ولري. څه ډول منحني ده؟

فعاليت

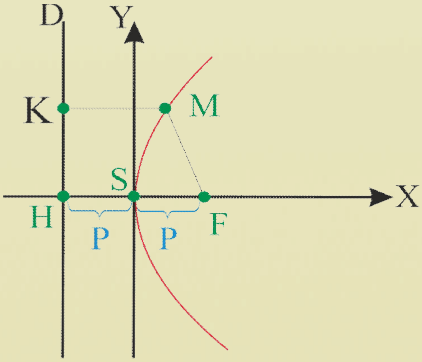


په مخامخ شکل کې د M، F او K ټکو مختصات درکړل شـوي دي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيداکولو لـه فـارمول څخـه پـه کار اخيستنې سره د FM او KM هر يو اوږدوالی پيـدا او يـو لـه بل سره يې پرتله کړئ.

له پورته فعاليت څخه لاندې تعريف بيانولای شو:

تعريف: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د يوه ثابت يا مستقر ټکي او يوه ثابت مستقيم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کيږي. دغه ثابت يـا مـستقر ټکـی د پـارابولا محـراق (F) او د D ثابت مستقيم خط ته د پارابولا هادي خط يا موجه خط (Directrix) وايي $\overline{MF}=\overline{MK}$

هغه مستقيم خط چې د پارابولا له محراق او راس څخه تير او د موجه (D) پر مستقيم خط عمود وي، د پارابولا د محراقي يا تناظري محور په نامه ياديږي.



د تناظري محور او منحني ګډ ټکـی د پـارابولا راس او پـه S سره ښودل کيږي.

آيا ويلای شئ چې S د $\overline{FH}$ نيمايي ټکی دی، ولې؟

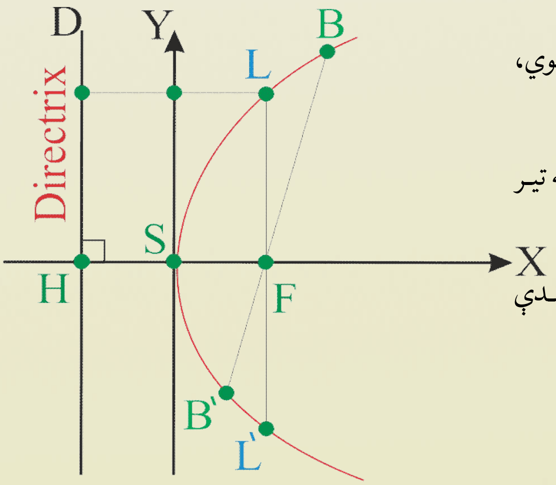
په پارابولا کې عن المرکزيت $(e=1)$ دی، ولې؟

د پارابولا وترونه

هغه مستقیم خط چې د پارابولا دوه ټکي سره ونښلوي، د پارابولا وتر بلل کیږي.

په شکل کې $\overline{BB'}$ چې د پارابولا له محراق څخه تیر شوی دی، محراقي وتر دی.

LL' چې د محراق په ټکي کې د تناظر پر محور باندې عمود دی عمودي وتر بلل کېږي.



پوښتنې

د پورته شکل په مرسته وښيئ چې د پارابولا د عمودي وتر اوږدوالی د $\overline{FH}$ خط د اوږدوالي څو برابره دی.

د پارابولا معادله

ثنکه کولای شو د هغه پارابولا معادله چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، پيدا کړو.

$$y^2 = 4px$$
$$x^2 = 4py$$

فعاليت

- د وضعيه کمياتو قايم سيستم په پام کې ونيسئ او د y له محور سره د هادي موازي خط رسم کړئ.
- د پارابولا منحني داسې رسم کړئ چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي.
- د x پر محور باندې محراق داسې وټاکئ چې فاصله يې له مبدا څخه د هادي خط له فاصلې سره مساوي وي.
- په منحني باندې د $M(x, y)$ ټکی وټاکئ ، هغه له F سره ونښلوئ او د M له ټکي څخه يو عمود پر هادي(موجه خط) باندې رسم او د تقاطع ټکي ته يې K ووایاست.
- د F او K د ټکو مختصات وليکئ.

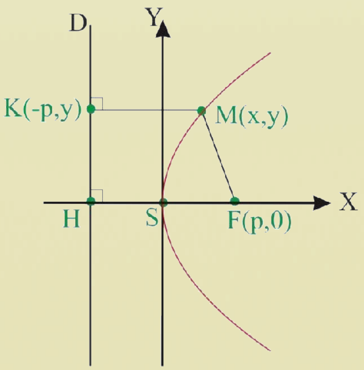
اوس د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې پيداکولو له فارمول څخه په کار اخيستنې سره د F, M او K, M ټکو ترمنځ فاصله پيدا کړئ او دا قيمتونه د پارابولا د تعريف په رابطه کې کېږدئ. $|MF| = |MK|$

ثبوت لومړی حالت: پوهيږو چې

$$|MF| = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$$
$$|MK| = x + p$$

اوس د $|MF|$ او $|MK|$ قيمتونه د $|MF| = |MK|$ په رابطه کې ايږدو:

$$\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = x + p$$



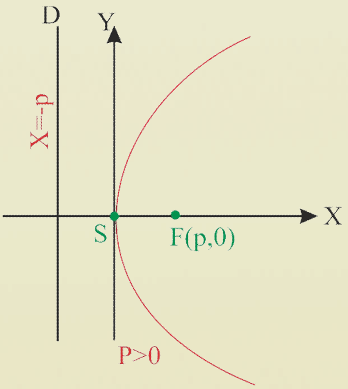
د پورته معادلې دواړه خواوې مربع کوو:

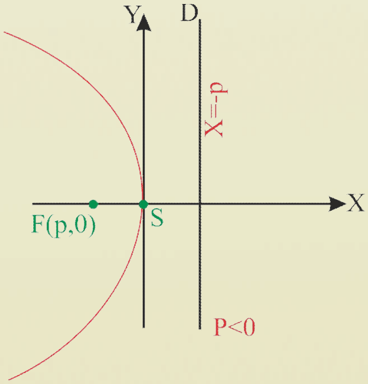
$$(\sqrt{y^2 + (p-x)^2})^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + (p-x)^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + p^2 - 2px + x^2 = x^2 + 2px + p^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 4px$$

وروستی رابطه دداسې پارابولا معادله راښيي چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې، محراق يې په $F(p,0)$ کې، د تناظر محور يې د x پر محور باندې منطبق دی او د موجه خط معادله يې $x=-p$ دی.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور ښي خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور باندې کيڼې خواته خلاصه ده.





لومړی مثال: د داسې پارابولا معادله په لاس راوړئ چې د محراق مختصات يې $F(2,0)$، د هادي مستقيم خط معادله $x=-2$ سره وي، د عمودي وتر د انجامونو مختصات يې پيدا کړئ.

حل : د محراق مختصات چې د x په محور باندې دي، ويلاې شو $P=2>0$، له دې امله د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

لرو چې: $y^2=4px$

اوس د $P=2$ قيمت په معادله کې ايږدو:

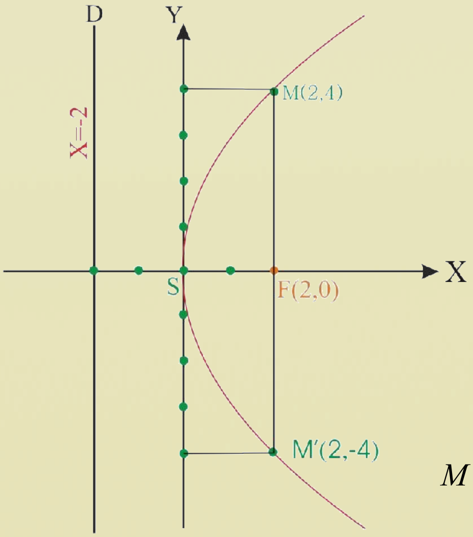
$$y^2=4\cdot 2x \quad \Rightarrow \quad y^2=8x$$

که چېرې د $x=2$ قيمت د $y^2=8x$ په معادله کې کېږدو، په دې صورت کې د پارابولا دوه ټکي چې د عمودي وتر انجامونه دي په لاس راځي، هغه عبارت دي له:

$$y^2=8\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad y^2=16$$

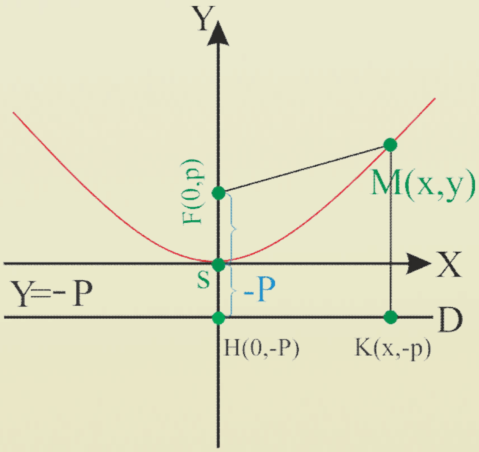
$$y=\pm 4$$

د عمودي وتر د انجامونو مختصات: $M(2,4)\ ,\ M'(2,-4)$



دویم حالت: که چېرې د پارابولا محراق (F) د y پر محور باندې پروت او د D مستقیم خط د x له محور سره موازي وي، د پارابولا معیاري معادله پیدا کړئ.

ثبوت: د پارابولا منحني پرمخ باندې د $M(x,y)$ ټکي په پام کې نیسو د تعریف له مخې لیکلای شو:



$$|\overline{MF}| = |MK|$$

$$|\overline{MF}| = \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

$$|\overline{MK}| = \sqrt{(x-x)^2+[(y-(-p)]^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

$$(\sqrt{x^2+(y-p)^2})^2 = (\sqrt{(y+p)})^2 \;/(\;\;)^2$$

$$\Rightarrow x^2+(y-p)^2 = (y+p)^2$$

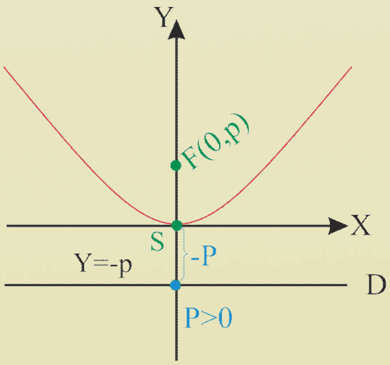
$$\Rightarrow x^2+y^2-2py+p^2 = y^2+2py+p^2$$

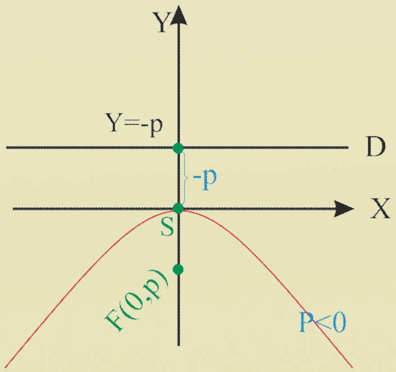
$$\Rightarrow x^2 = 4py$$

پورته معادله دداسې پارابولا معادله ده چې راس یې د وضعیه کمیاتو د سیستم په مبدا کې او محراقي محور یې د y محور دی چې د محراق مختصات یې $F(0,p)$ او $y=-p$ یې د هادي مستقیم خط معادله ده.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





دویيم مثال: د $x^2 = 12y$ په معادله کې د پارابولا د راس او محراق مختصات او د هادي خط معادله پیدا کړی.

حل : **لومړي** د $x^2 = 4py$ په معادله کې د p قیمت په لاس راوړو.

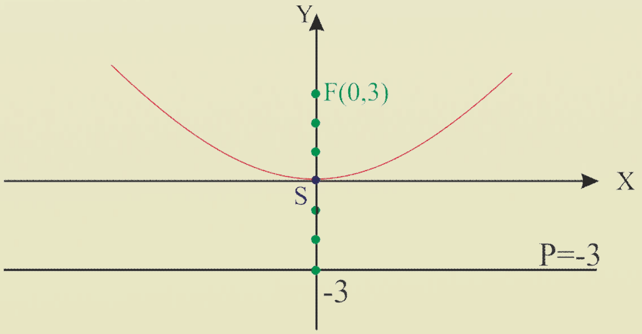
$$4p = 12 \Rightarrow p = 3$$

څرنگه چې $P = 3 > 0$ څخه دی، نو د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

1 – د راس مختصات عبارت دي له: $\left.\begin{array}{l} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow S(0,0)$

2 – د محراق مختصات عبارت دي له : F (0, 3)

3 – د هادي خط معادله عبارت ده له: $y = -p \Rightarrow y = -3$



پوښتني

1 – د $y^2 - 4x = 0$ او $x^2 = 2y$ معادلو کې د هرې پارابولا د راس وضعیه کمیات او د هادي (موجه خط) معادلې پیدا او گرافونه يې رسم کړئ.

2 – د لاندې قیمتونو له مخې د هرې پارابولا معادله پیدا کړئ.

$a)\ S(0,0) \qquad F(0,5)$

$b)\ S(0,0) \qquad F(-2,0)$

د هغې پارابولا معادله چې راس يې يو اختياري ټکی وي

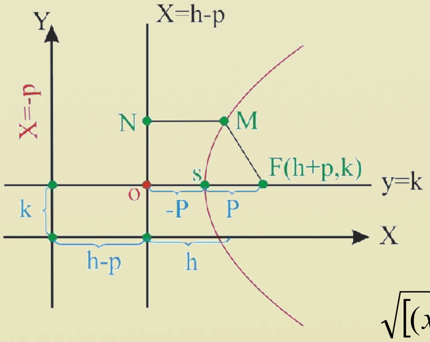
آيا د داسې پارابولا معادله پيداکولای شو چې د راس مختصات يې د وضعيه کمياتو په مبداکې نه وي.

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$
$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

فعاليت

- يوه پارابولا د وضعيه کمياتو په سيستم کې رسم کړئ چې راس يې (h,k) او تناظري محور يې د x له محور سره موازي وي.
- د پارابولا په منحنې باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ او هغه له F سره ونښلوئ، بيا د M له ټکي څخه يو عمود خط پر هادي خط(موجه) باندې رسم او هغه ته N وواياست.

لومړی حالت: د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې له فورمول څخه په ګټې اخيستنې سره د F,M او N,M ټکو ترمنځ فاصله پيداکړئ، بيا د هغې پارابولا معادله چې راس يې $S(h,k)$ ده، په لاس راوړئ.



ثبوت:څرنګه چې د F او M ټکو وضعيه کميات پيژنو او همدارنګه د N وضعيه کميات له $(h-p,y)$ څخه عبارت دی، د پارابولا د تعريف له مخې ليکو

$$|MF|=|MN|$$

$$\sqrt{[(x-(h+p)]^2+(y-k)^2}=\sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو او له اختصار وروسته ليکو:

$$[(x-(h+p)]^2+(y-k)^2=[x-(h-p)]^2$$
$$\Rightarrow x^2-2(h+p)x+(h+p)^2+y^2-2ky+k^2=x^2-2(h-p)x+(h-p)^2$$

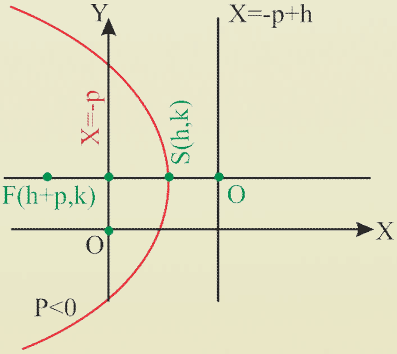
د پورته رابطې له پراختيا او ساده کولو وروسته په لاس راځي چې:

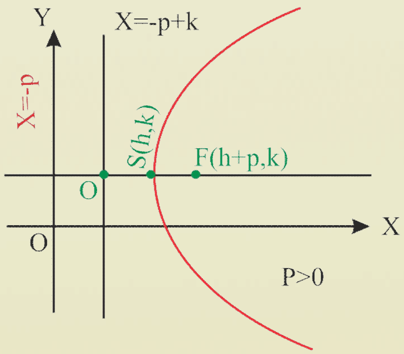
$$y^2-2ky+k^2=4px-4ph$$
$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

پورتنی معادله د هغې پارابولا معادله ده، چې د راس او محراق وضعیه کمیات یې په ترتیب سره $S(h,k)$ او $F(h+p,k)$ دي، او د موجه خط معادله یې $x=-p+h$ ، تناظري محور یې $y=k$ دی.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.





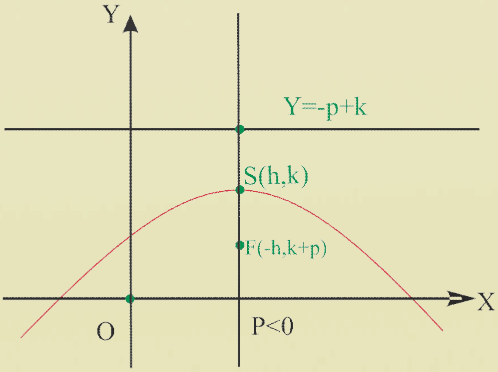
دویم حالت:د هغې پارابولا معادله چې راس یې (h,k) او د تناظر محور یې د y له محور سره موازي وي، عبارت ده له: $(x-h)^2=4p(y-k)$

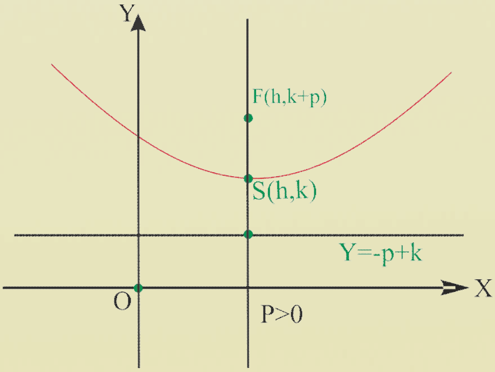
چې د پارابولا د راس مختصات $S(h,k)$ او د محراق مختصات یې $F(h,k+p)$ دي.

$y=k-p$ د پارابولا د هادي خط معادله او $x=-h$ تناظري محور دی.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





لومړی مثال: غواړو د $(x-1)^2=12(y-2)$ پارابولا په معادله کې د راس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله، تناظري محور او د عمودي وتر د انجامونو مختصات پیدا کړو.

حل: څرنګه چې معادله د $(x-h)^2=4p(y-k)$ عمومي شکل لري.

نو $k=2,h=1$ کېږي، په دې صورت کې د پارابولا د رأس وضعیه کمیات عبارت دي له: $S(1,2)$

$$4p=12 \Rightarrow p=\frac{12}{4}=3$$

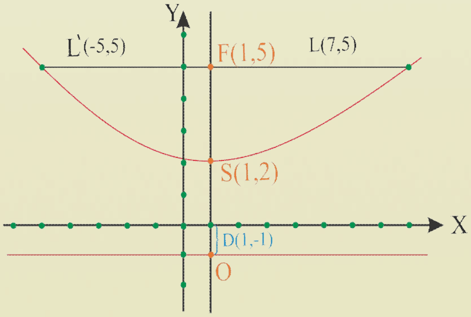
د محراق مختصات: $F(1,5)\quad \Rightarrow \quad F(h,k+p)=F(1,2+3)$

د موجه خط معادله $y=2-3=-1 \quad \Rightarrow \quad y=k-P$

د تناظر محور: $x=h \Rightarrow x=1$

د عمودي وتر د انجامونو د مختصاتو د پیداکولو لپاره د y قیمت چې په محراق کې لرو په عمومي معادله کې اېږدو یعني $y=5$ دی.

$$(x-2)^2=12(5-2)$$
$$(x-1)^2=12\cdot 3 \Rightarrow (x-1)^2=36$$
$$(x-1)=\pm 6$$
$$x_1=6+1=7,\ \ x_2=-6+1=-5$$
$$L(7,5) \qquad L'(-5,5)$$



دویم مثال: د $(y-4)^2=-6(x+3)$ معادله په پام کې ونیسی، د پارابولا د راس او محراق مختصات، د موجه خط معادله، د تناظري محور معادله، د عمودي وتر د انجامونو مختصات پیدا او گراف یې رسم کړئ.

حل:دراس مختصات: $S(-3,4) \quad \Rightarrow \quad k=4,h=-3$

$$4P=-6 \Rightarrow P=-\frac{3}{2}$$

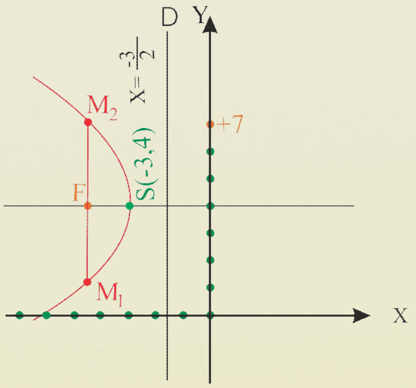
څرنگه چې $0<-\frac{3}{2}$ ده، نو د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.

د محراق مختصات: $F(h+p,k)=(-\frac{9}{2},4)$

موجه خط معادله عبارت ده له: $x=-\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x=h-p$

د تناظري محور معادله: $y=4 \quad \Rightarrow \quad y=k$

د محراق $x=-\frac{9}{2}$ مختصی قیمت په معادله کې اېږدو او د عمودي وتر د انجامونو مختصات په لاس راځي.



$$(y-4)^2=-6(x+3)=-6(-\frac{9}{2}+3)$$
$$(y-4)^2=9 \Rightarrow y-4=\pm 3$$
$$y_1=3+4=7$$
$$y_2=-3+4=1$$
$$M_2(-\frac{9}{2},7)\ ,\ M_1(-\frac{9}{2},1)$$

یادونه: د $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$ د معادلې ګراف یوه پارابولا ده، په داسې حال کې چې A یا C صفر وي نه دواړه $(C\neq 0\ ,\ A=0)$ وي یا $C=0, A\neq 0$ وي).

پوښتنه: د $(x-h)^2=4p(y-k)$ معادله په توسعوي ډول ولیکئ.

دریم مثال: د $y^2-2y+8x+25=0$ پارابولا معادله، د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ د راس او محراق مختصات، د مؤجه خط او تناظري محور معادلې یې پیدا کړئ.

حل: په راکړل شوې معادله کې $A=0$ دی، نو نظر د y متحول ته یې، مربع بشپړوو.

$$y^2-2y+(1)^2-(1)^2+8x+25=0$$
$$(y-1)^2+8x+24=0 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2+8(x+3)=0$$
$$\Rightarrow (y-1)^2=-8(x+3)$$

په معادله کې لیدل کیږي: $4P=-8 \Rightarrow P=-2$

د راس مختصات: $k=1\ ,\ h=-3 \Rightarrow S(-3,1)$

د محراق مختصات: $F(h+p,k)\Rightarrow F(-3-2,1)\Rightarrow F(-5,1)$

د موجه خط معادله $x=h-p \Rightarrow x=-3+2=-1$

د تناظر محور : $y=k \Rightarrow y=1$.

پوښتنې

1. د لاندې پارابولا معادله پیداکړئ، په داسې حال کې چې:

$S(1,3), F(-1,3)$

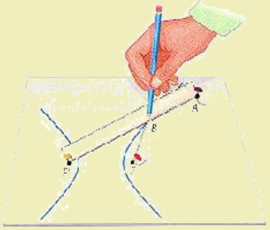
2- د $(y-1)^2=12(x-4)$ معادلې ګراف د ټولو جزئیاتو سره رسم کړئ.

3- لاندې معادلې د پارابولا د معیاري معادلو په ډول ولیکئ او ګراف یې رسم کړئ.

a) $y^2-6y+8x+41=0$ b) $x^2-2x-6y-53=0$

هـايپـربـولا

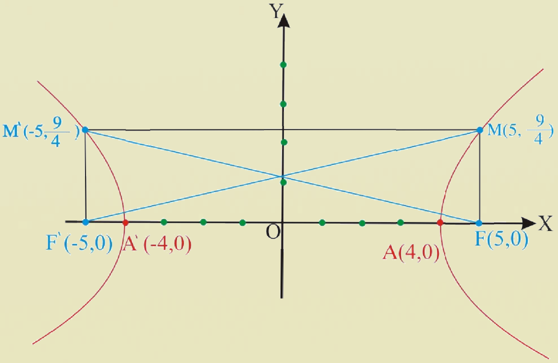
Hyperbola



په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل يې له دوو مستقرو ټکو څخه تل له يوه ثابت اوږدوالي سره مساوي وي، څه ډول يوه منحني کېدلای شي؟

فعاليت

- په لاندې شکل کې د A, M', M, F', F او A' ټکو مختصات درکړل شوي دي.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيداکولو له فارمول څخه په کار اخيستنې سره د $|MF|, |MF'|$ او $|AA'|$ اوږدوالی پيدا کړئ.
- د $|MF'| - |MF|$ د تفريق حاصل په لاس راوړئ او د $|AA'|$ له اوږدوالي سره يې پرتله کړئ.
- پورتنی فعاليت د M' ټکي لپاره تطبيق او پايله يې وليکئ
- د $|MF'| - |MF|$ او $|M'F| - |M'F'|$ د تفريق حاصل يو له بل سره پرتله کړئ.



د پورتني فعاليت له سرته رسولو وروسته لاندې تعريف بيانولای شو:

تعريف: په يوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل يې له دوو مستقرو ټکو څخه تل مساوي اوږدوالی ولري، هايپربولا Hyperbola بلل کېږي، يعنې: $|MF'| - |MF| = |AA'| = 2a$

په شکل کې F او F' د هايپربولا محراقونه، M او M' د هايپربولا دوه اختياري ټکي دي.

د FF' منځنی ټکی د هايپربولا مرکز دی، د مرکز او هر يوه راس ترمنځ فاصله په a او د مرکز او هر يوه محراق ترمنځ فاصله په c سره ښيي. $AA' = 2a$ او $FF' = 2c$.

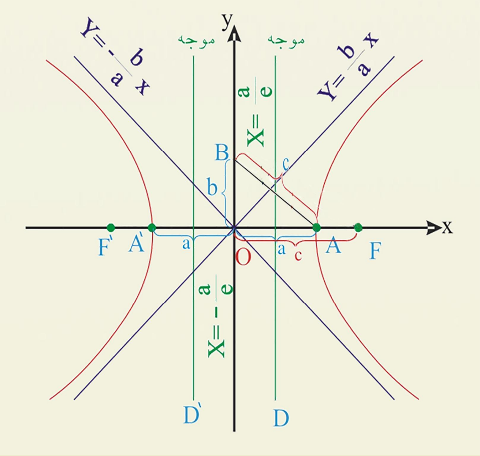
د هایپربولا تناظري محورونه او راسونه:

د بیضوي په څېر هایپربولا هم دوه تناظري محورونه لري چې یو یې پـه FF' بانـدې منطبق دی او بل یې د FF' عمودي ناصف کوونکی دی. د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی یا ځاي، د ها یپربولا مرکز بلل کېږي.

هغه تناظري محور چې له FF' څخه تېرېږي، د متقاطع محور (Transverse axis) په نامه یادېږي، ځکـه چې هایپربولا د A او A' په دوو ټکوکې قطع کوي چې دې دوو ټکو ته د هایپربولا حقیقي راسونه وایې او اوږدوالی یې له $|AA'| = 2a$ څخه عبارت دی.

هغه تناظري محور چې د هایپربولا په مرکز کې په متقاطع محور باندې عمود دی او هایپربولا نه قطع کوي، د مزدوج محور (conjugate axis) په نوم یـادېږی. د مرکـز دواړو خواوتـه د B او B' دوه ټکـي پـر نومـوړی محـور بانـدې داسي په نظر کې نیسو چې $OB = OB' = b$ وي، دا دوه ټکي د هـایپربولا غیـرې حقیقـي راسـونه بلـل کیـږي چې ترمنځ یې فاصله $|BB'| = 2b$ ده.

په یوه هایپربولا کې د a, b او c اوږدوالي ترمنځ داسې رابطه شته: $c^2 = a^2 + b^2$



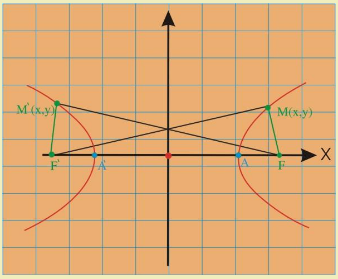
عن المرکزیت: څرنګه چې پـه هـایپربولا کـې $c > a$ دي، نـو $e > 1$ کیـږي. چې د a, b, c او عـن المرکزیـت ترمنځ د $e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ رابطه شته. د $e = \frac{c}{a}$ لـه رابطې څخه په کار اخېستې سره نوموړې رابطه په لاس راوړي.

پوښتني

د هایپربولا یو شـکل رسـم کـړئ او پـه هغـه کې د هـایپربولا مرکز، محراقونـه، حقیقي او غیـرې حقیقـي راسونه، متقاطع او مزدوج محورنه وښیئ.

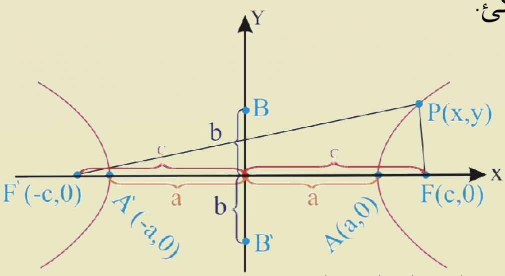
د هایپربولا معادله

آیا داسې یوه هایپربولا رسمولای شئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي؟



فعالیت

- داسې هایپربولا رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي.
- د $P(x,y)$ ټکی د هایپربولا د منحني په یوې څانگې باندې وټاکئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ
- د F, P او F' ټکو ترمنځ د هایپربولا د تعریف رابطه ولیکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د PF او PF' فاصلې پیدا کړئ او هغه د هایپربولا د تعریف په رابطه کې ولیکئ.



د هایپربولا د معادلې د پیداکولو لپاره د تعریف له مخې لرو: $|PF'|-|PF|=2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

د مساواتو د دواړو خواو له مربع کولو څخه وروسته لرو:

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$\Rightarrow 4cx-4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \ /\div 4$$

$$\Rightarrow cx-a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

بیا هم د مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$(cx-a^2)^2 = a^2(x-c)^2+y^2$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$\Rightarrow c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2 = a^2c^2-a^4 \quad \Rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

څرنگه چې په هایپربولا کې $c^2 = a^2 + b^2$ رابطه شتون لري، نو $c^2 - a^2 = b^2$ کېږي، نو په پورته افاده کې

د $c^2 - a^2$ د قیمت په اېښودلو سره لیکلای شو: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \ /\div a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

پورتنۍ معادله د داسي هایپربولا معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدأ او محراقونه یې په افقي محور پراته دي.

دویم حالت: که چیرې د هایپربولا متقاطع محور $\overline{AA'}$ د y پر محور پروت وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده له:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

د پورتنۍ رابطې گراف رسم، فارمول یې ثبوت او د محراقونو او راسونو مختصات یې پیدا کړئ.

د هایپربولا موجه خطونه

که چیرې د هایپربولا محراقونه د x یا y په محورونو پراته وي، په دې صورت کې لیکلای شو چې:

$$e = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

له دې امله ویلای شو چې دا موجه خطونه په متقاطع محور باندې عمود دي چې د هغو فاصله د هایپربولا له مرکز څخه د $\pm\frac{a}{e}$ یا $\pm\frac{a^2}{c}$ څخه عبارت ده.

د هغې هایپربولا د موجه (ها دي) خطونو معادلې چې محراقونه یې د y پر محور باندې پراته دي له $y = \pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

او د هغې هایپربولا د موجه خطونو معادلې چې محراقونه یې د x پر محور باندې پراته دي له $x = \pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

د هایپربولا مجانبونه

هغه مستقیم خطونه چې د هایپربولا له مرکز څخه تیر اوپه لایتناهي کې د هایپربولا له منحني سره مماس وي.

د هایپربولا مجانبونه بلل کیږي .

د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هایپربولا معادله په پام کې نیسو:

$$a^2y^2=b^2x^2-a^2b^2$$
$$a^2y^2=b^2(x^2-a^2)$$
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\frac{b^2}{a^2}\left[x^2(1-\frac{a^2}{x^2})\right]$$
$$\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

که چیرې په پورتنی رابطه کې x لایتناهي ته نږدې شي د $\frac{a^2}{x^2}$ کسر د صفر خواته نږدې کیږي په پایله کې $\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)$ د یوه عدد ته تقرب کوي، په دې صورت کې $y=\pm\frac{b}{a}x$ لاس ته راځي.

نو $y=\pm\frac{b}{a}x$ د هغو مجانبونو معادلې دي چې د هایپربولا محراقونه د x پر محور باندې پراته وي.

که چیرې محراقونه د y پر محور باندې پراته وي، د مجانبونو معادلې یې له $y=\pm\frac{a}{b}x$ څخه عبارت دي.

لومړي مثال: د هایپربولا د $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ په معادله کې د محراقونو مختصات، د راسونو مختصات، د موجه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیدا او په شکل کې یې وښایاست.

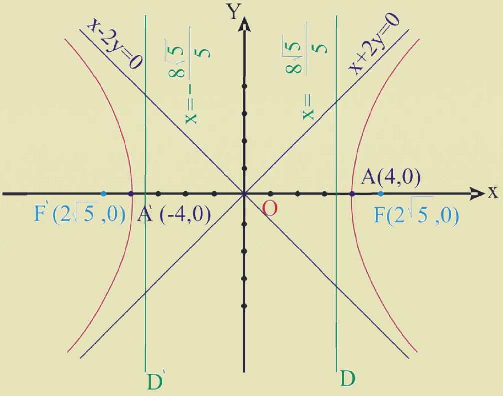
حل: دراْسونو مختصات: $a^2=16\Rightarrow a=\pm4\Rightarrow A(4,0),A'(-4,0)$

$$b^2=4\quad\Rightarrow\quad b=\pm2\quad\Rightarrow\quad B(0،\ 2)\ ،\ B'(0،\ -2)$$

د محراقونو مختصات: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=\pm2\sqrt{5}$

$$\Rightarrow F(2\sqrt{5},0),F'(-2\sqrt{5},0)$$

د موجه خطونو معادلې: څرنگه چې محراقونه د x پر محور باندې پراته دي، له دې امله:



$$x=\pm\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}=\frac{4^2}{2\sqrt{5}}=\frac{16}{2\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$
$$y=\pm\frac{b}{a}x\quad\Rightarrow\quad y=\pm\frac{2}{4}x=\pm\frac{1}{2}x$$
$$2y=\pm x$$

یا: $x=\pm2y\quad\Rightarrow\quad x+2y=0,x-2y=0$

دويم مثال: د $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$, معادله د هايپربولا يوه معادله ده، په نوموړې معادله کې د محراقونو، راسونو مختصات، د مجانبونو او موجه خطونو معادلې پيدا او ګراف يې رسم کړئ.

حل: پورتنی معادله د هايپربولا معادله ده چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې او د y محور يې متقاطع محور دی.

د راسونو مختصات: $a^2=4\Rightarrow a=\pm 2\Rightarrow A(0,2)\ ,\ A'(0,-2)$

$$b^2=9\Rightarrow b=\pm 3\Rightarrow B(3\ ,0)\ \ ,\ \ B'(-3\ \ ,0)$$

د محراقونو مختصات: $c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=4+9=13\Rightarrow c=\pm\sqrt{13}$

$$F(0,\sqrt{13})\quad ,\quad F'(0,-\sqrt{13})$$

د مجانبونو معادلې: څرنګه چې متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د مجانبونو معادلې يې عبارت دي له:

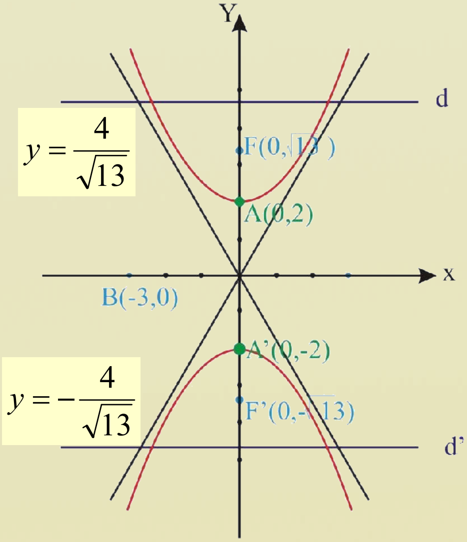
$$y=\pm\frac{a}{b}x\ \Rightarrow\ y=\pm\frac{2}{3}x\ \Rightarrow\ 3y=\pm 2x$$

$$3y-2x=0\qquad ,\qquad 3y+2x=0$$

د موجه خط معادله: څرنګه چې د هايپربولا متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د موجه خطونو معادلې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}=\pm\frac{4\sqrt{13}}{13}$$

$$y_1=\frac{4\sqrt{13}}{13}\ ,\quad y_2=-\frac{4\sqrt{13}}{13}$$



پوښتنې

د $4x^2-y^2=16$ هايپربولا له معادلې څخه د محراقونو وضعيه کميات، د راسونو وضعيه کميات، د موجه خطونو او د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ او ګراف يې رسم کړئ.

د هغې هایپربولا معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي

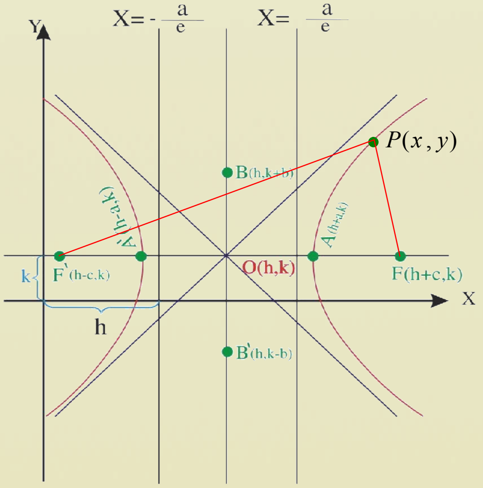
آیا د داسې هایپربولا معادله شته چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په سیستم کې داسې هایپربولا رسم کړئ چې د مرکز مختصات یې (h,k) او متقاطع محور یې د x له محور سره موازي وي.
- د هایپربولا د منحنی پرمخ باندې د $p(x,y)$ یو اختیاري ټکی په پام کې ونیسئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ.
- د هایپربولا د مرکز (h,k) په پام کې نیولو سره د محراقونو مختصات یعنې F او F'، د راسونو مختصات یعنې A, A', B او B' په شکل کې وښایاست.



د شکل څخه په کار اخیستنې سره د $|PF'|-|PF|=2a$ رابطه حساب کړئ.

لومړی حالت: د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول او د هایپربولا د تعریف له رابطې څخه په کار اخیستنې سره لیکلای شو:

$$|PF'|-|PF|=2a$$

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}-\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

یا

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

د پورتني مساواتو دواړه خواوې مربع کوو:

$$\left(\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}\right)^2$$

$$[x-(h-c)]^2+(y-k)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h-c)+(h-c)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h+c)+(h+c)^2$$

د مشابه حدونو له جمعې او تفریق وروسته لیکلای شو:

$$cx-(ch+a^2)=a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}\ /(\ \ )^2$$

$$c^2x^2-2cx(ch+a^2)+(ch+a^2)^2=a^2[x-(h+c)]^2+a^2(y-k)^2$$

د ضرب، او توانونو له ساده کولو وروسته مشابه حدونه جمع او تفریق کوو او پورتنۍ رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$c^2x^2-a^2x^2-2c^2hx+2a^2hx+c^2h^2-a^2h^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2(c^2-a^2)-2hx(c^2-a^2)+h^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x^2-2hx+h^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

څرنګه چې $c^2-a^2=b^2$ دي، نو پورته رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

دواړه خواوې په a^2b^2 ویشو:

$$\frac{b^2(x-h)^2}{a^2b^2}-\frac{a^2(y-k)^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

د حقیقي راسونو مختصات: $A(h+a,k)\quad A'(h-a,k)$

د غیري حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k+b)\quad B'(h,k-b)$

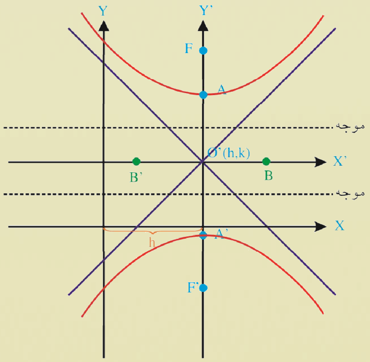
د محراقونو مختصات: $F(h+c,k)\ ,\ F'(h-c,k)$

د مجانبونو معادلې: $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$

د موجه خطونو معادلې: $x-h\pm\frac{a}{e}$

دویم حالت: که چیرې متقاطع محور د y له محور سره موازي وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده، له:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



د شکل له مخې د هایپربولا د رأسونو او محراقونو مختصات د مؤجه خطونو او د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.

یادونه: د هایپربولا پراختیایي معادله له $AX^2 + BY^2 + DX + EY + F = 0$ څخه عبارت ده په داسې حال کې چې $A, B \neq 0$ او $A \neq B$ یا $A = B$ خو مختلف الاشاره وي.

لومړي مثال: د $9(x-3)^2 - 4(y+1)^2 = 144$ معادله په پام کې ونیسئ، د مرکز، د راسونو، محراقونو مختصات او د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.

حل: راکړل شوي معادله په معیاري ډول لیکو:

$$\frac{9(x-3)^2}{144} - \frac{4(y+1)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$$

د مرکز مختصات: $k = -1, h = 3$ یعنې $(3,-1)$ دي

د راسونو مختصات: $a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$

$$A(h+a,k) = A(3+4,-1) = A(7,-1)$$

$$A'(h-a,k) = A'(3-4,-1) = A'(-1,-1)$$

او همدارنګه پوهېږو چې:

$$\begin{cases} b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6 \\ B(h,k+b) = B(3,-1+6) = B(3,5), \\ B'(h,k-b) = B'(3,-1-6) = B'(3,-7) \end{cases}$$

پوهېږو چې په هایپربولا کې: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow c = \pm\sqrt{52}$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k) = F(3+\sqrt{52},-1) \qquad F'(h-c,k) = F'(3-\sqrt{52},-1)$

که چیرې متقاطع محور د x له محور سره موازي وي، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h) \Rightarrow y = \pm\frac{6}{4}(x-3) - 1 = \pm\frac{3}{2}(x-3) - 1$$

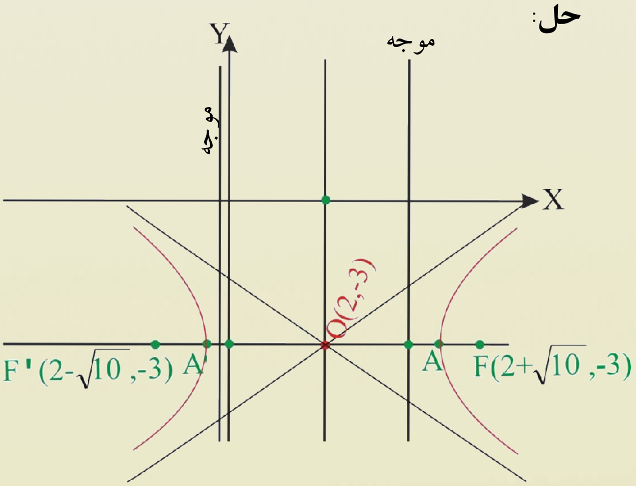
$$y = \pm\frac{3}{2}(x-3) - 1 \ /\cdot 2 \Rightarrow 2y = \pm 3(x-3) - 2$$

$$2y = 3x - 9 - 2 \Rightarrow 2y - 3x + 11 = 0$$

$$2y = -3x + 9 - 2 \Rightarrow 2y + 3x - 7 = 0$$

دویم مثال: د هایپربولا $2x^2 - 8x - 3y^2 - 18y - 31 = 0$ معادله په پام کې ونیسئ. د مرکز، راسونو او د محراقونو مختصات او د موجه خطونو او محانبونو معادلې په لاس راوړئ.

حل:



$$2(x^2-4x)-3(y^2+6y)-31=0$$
$$2[(x-2)^2-4]-3[(y+3)^2-9]-31=0$$
$$2(x-2)^2-8-3(y+3)^2+27-31=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2+27-39=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2-12=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2=12$$
$$\frac{2(x-2)^2}{12}-\frac{3(y+3)^2}{12}=\frac{12}{12}$$
$$\frac{(x-2)^2}{6}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$$

پورتنی معادله په معیاري ډول واړول شوه، لیدل کیږي چې $h=2$ او $k=-3$ یعني د مرکز مختصات یې: $O(2,-3)$

له بلې خوا:

$$b^2=4\Rightarrow b=\pm 2 \quad , \quad a^2=6\Rightarrow a=\pm\sqrt{6}$$
$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow \quad c=\pm\sqrt{a^2+b^2}=\pm\sqrt{6+4}=\pm\sqrt{10}$$

د محراقونو مختصات: $F(h\pm c,k)\Rightarrow F(2+\sqrt{10},-3) \quad , \quad F'(2-\sqrt{10},-3)$

د حقیقي راسونو مختصات: $A(h\pm a,k)\Rightarrow A(2+\sqrt{6},-3) \quad , \quad A'(2-\sqrt{6},-3)$

د غیرې حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k\pm b)\Rightarrow B(2,-1) \quad , \quad B'(2,-5)$

د موجه خطونو معادلې: $x-h=\pm\frac{a}{e}\Rightarrow x=\pm\frac{a}{e}+h=\pm\frac{6\sqrt{10}}{10}+2\Rightarrow x=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}+2$

د مجانبونو معادلې: څرنگه چې متقاطع محور د x له محور سره موازي دی، نو لیکلای شو:

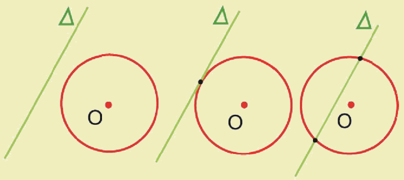
$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$$
$$y=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)-3/\cdot\sqrt{6}\Rightarrow \sqrt{6}y=\pm 2(x-2)-3\sqrt{6}$$
$$\begin{cases}\sqrt{6}y-2x+4+3\sqrt{6}=0\\ \sqrt{6}y+2x-4+3\sqrt{6}=0\end{cases}$$

پوښتنې

د $9x^2-4y^2+54x+16y-79=0$ معادله د هایپربولا پر معیاري معادلې باندې واړوئ.

د مستقیم خط موقعیت نظر مخروطي مقاطعو ته

یوه اختیاري مستقیم خط، یوه دایره د امکان په صورت کې په څو ټکو کې قطع کولای شئ؟



فعالیت

د O دایره او د Δ مستقیم خط په پام کې ونیسئ:

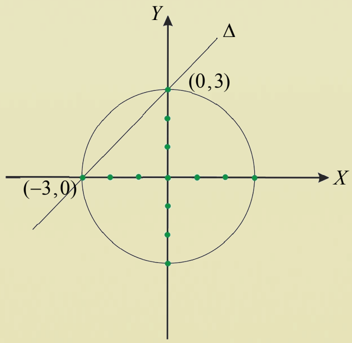
- یوه دایره او مستقیم خط داسې رسم کړئ، چې یوازې یو ګډ ټکی سره ولري.
- آیا کیدای شي چې یوه مستقیم خط، یوه دایره له دوو ټکو څخه په زیاتو ټکو کې قطع کړي؟
- که چیرې د دایرې د مرکز او مستقیم خط تر منځ واټن، د دایرې له شعاع څخه لوی وي. دایره او مستقیم خط څو ګډ ټکي لري؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په یوه مستوي کې یوه اختیاري مستقیم خط او یوه دایره امکان لري، یوازې یوه، دوه او یا هیڅ ګډ ټکی ونلري.

لومړی مثال: په وضعیه کمیاتو کې د $x^2+y^2=9$ دایره او $y=x+3$ مستقیم خط رسم او موقعیت یې و ټاکئ.

حل: په شکل کې لیدل کېږي، چې دایره او مستقیم خط یو بل په $(0,3)$ او $(-3,0)$ دوو ټکو کې قطع کوي ددې پایلې د لاس ته راوړلو لپاره که چیرې د مستقیم خط له معادلې څخه د y قیمت د دایرې په معادله کې وضع کړو عین نتیجه په لاس راځي:



$$y=x+3$$

$$x^2+y^2=9 \Rightarrow x^2+(x+3)^2=9$$

$$x^2+x^2+6x+9=9$$

$$\Rightarrow 2x^2+6x=0$$

$$x_1=0 \quad , \quad x_2=-3$$

د x قیمتونه د $y=x+3$ په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي.

$$y_1=0+3 \Rightarrow y_1=3$$

$$y_2=-3+3 \Rightarrow y_2=0$$

د $(0,3)$ او $(-3,0)$ ټکي د دایرې او مستقیم خط د تقاطع ټکی دی.

په عمومي ډول کله چې د مستقیم خط له معادلې څخه د x یا y متحول قیمت د مخروطي مقاطعو پـه معادلـه کـې کېږدو، د حل لپاره یوه دویمه درجه معادله لاس ته راځي چې حل یې د Δ په قیمت پـورې اړه لـري. دغه مـسئله پـه لاندې ډول د څېړلو،او پام وړ، پایلې لري:

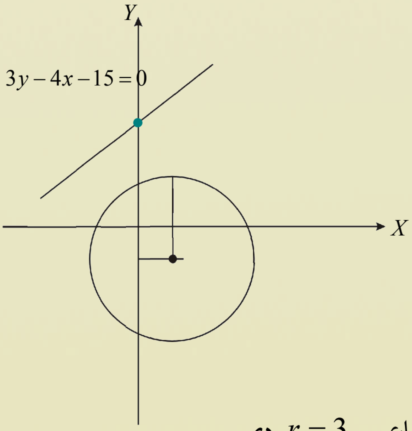
1- که چېرې $\Delta > 0$ وي، معادله دوه حلونه لري، نو په دې ډول مستقیم خط او منحني یوبل په دوو ټکو کې قطع کوي.

2- که چېرې $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مـضاعف یـا مـساوي حلونـه لـري او پـه دې ډول مـستقیم خـط د مخروطي مقاطعو له منحني سره یوازې یو ګډ ټکی چې مماس بلل کېږي، لري.

3- که چېرې $\Delta < 0$ وي، معادله حل نلري، په بل عبارت، مستقیم خط او منحني یو بل نه قطع کوي.

دویم مثال: د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ دایره او $3y - 4x - 15 = 0$ مستقیم خط په پـام کـې ونیسئ او موقعیتونه یې له یو بل سره و څېړئ.

حل: لومړی د دایرې معادله په معیاری شکل بدلوو.



$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 - (2)^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow \ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \qquad C(1,-2)$$

د دایرې له معیاري معادلې څخه پوهېږو چې د دایرې مرکز $C(1,-2)$ او شعاع یې $r = 3$ دی.

همدغه راز د مستقیم خط معادله معیاري شکل ته اړوو.

$$3y - 4x - 15 = 0 \Rightarrow 3y = 4x + 15 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 5$$

که چیرې د مستقیم خط له معادلې څخه د y قیمت د x له جنسه د دایرې په معیاري معادله کې کېږدو، نو لاندې پایله په لاس راځي.

$$(x-1)^2+(\frac{4}{3}x+5+2)^2=9$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1+(\frac{4}{3}x+7)^2=9 \;\; \Rightarrow x^2-2x+1+\frac{16}{9}x^2+14\frac{4}{3}x+49-9=0$$

$$\Rightarrow\; 9\cdot\frac{25}{9}x^2-9\cdot\frac{50}{3}x+9\cdot 41=0$$

$$\Rightarrow 25x^2+150x+369=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=22500-36900=-14400 \quad , \quad \Delta<0$$

څرنګه چې $\Delta<0$ ده، نو مستقیم خط او دایره ګډ ټکی نه لري.

دریم مثال : د $y=x-1$ د مستقیم خط موقعیت د $y-x^2+1=0$ پا رابولا ته وڅیړئ.

حل: د پورتنۍ مسئلې د څېړلو لپاره د y قیمت د پارا بول په معادله کې و ضع کوو، او بیاګام په ګام د معادلې حل په پام کې نیسو:

$$y=x-1$$

$$y-x^2+1=0 \;\;\Rightarrow\;\; (x-1)-x^2+1=0$$

$$\Rightarrow x-1-x^2+1=0 \;\;\Rightarrow\;\; x^2-x=0$$

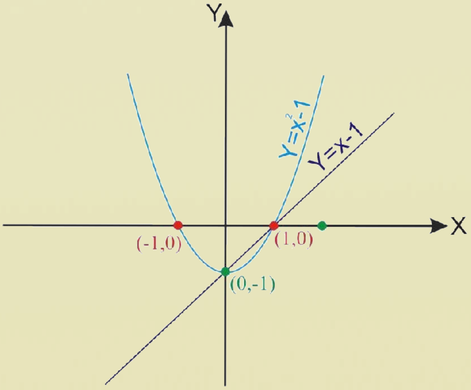
$$\Delta=b^2-4ac \;\;\Rightarrow\;\; \Delta=(-1)^2-4(1)(0)=1-0 \;\;\Rightarrow \Delta=1$$

څرنګه چې $\Delta=1>0$ ده، نو $y=x-1$ مستقیم خط د $y-x^2+1=0$ پارابول په دوو ټکو کې قطع کوي چې کولای شو حلونه یې په لاندې ډول پیدا کړو.

$$x^2-x=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1}}{2}$$

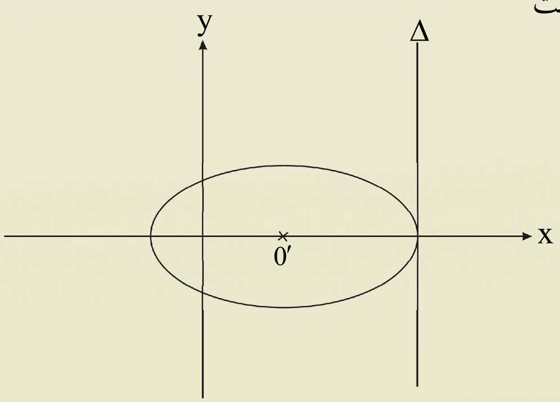
$$x_1=1 \qquad , \qquad x_2=0$$



که چیرې په لاس راغلي قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې کېږدو، نو د نوموړي مستقیم خط او پارابولا د قطع کولو ټکي په لاس راځي، هغه عبارت دي له : $(1,0)$, $(0,-1)$ چې دغه ټکي په ګراف کې هم په ښکاره ډول لیدل کېږي.

ځلورم مثال: د $x=5$ مستقیم خط او $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ بیضوي موقعیتونه وښیئ.

حـل: کـه چېـرې د $x=5$ د مـستقیم خـط قیمـت د بیضوي په معادله کې کښېږدو، نو په لاس راځي:



$$\frac{(5-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{9}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4}=1-1 \Rightarrow y^2=0$$

څرنګه چې: $\Delta=b^2-4ac=0$

په دې ډول ویلای شو چې مستقیم خط او بیضوي یوګډ ټکی لري چې په شکل کې په ښکاره ډول لیدل کیږي.

یادونه: د مخروطي مقاطعو غزیدلی یا انکشاف ورکړل شوي، معادله په لاندې ډول ده:

$$A,B,D,E,F \in IR \quad , Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$

د پورتنۍ معادلې د پېژندلو لپاره په یاد ولرئ چې:

1- که چېرې $A,B\neq 0$ ، $A=B$ او یو شان علامې ولري، یوه دایره ده.

2- که چېرې $A,B\neq 0$ ، $A\neq B$ او یو شان علامې ولري، یو بیضوی دی.

3- که چېرې $A,B\neq 0$ ، $A\neq B$ یا $A=B$ او مختلفې علامې ولري، هایپربولا ده.

4- که چېرې معادلې لاندې شکل ولري، ګراف یې یو پارابولا ده.

$$Ay^2+By+Cx+D=0 \quad \text{او} \quad Ax^2+Bx+Cy+D=0$$

پوښتنې

1- د لاندې معادلو ډول د هغوی د ګرافونو د رسم کولو وروسته وټاکئ.

a) $y^2-2y+x+3=0$ b) $9x^2+9y^2=27$

c) $25x^2+16y^2=400$ d) $x^2-y^2=0$

e) $y^2+6y-x+2=0$

2- د $9x^2+4y^2=36$ بیضوي او $y=3$ مستقیم خط یو بل په څو ټکو کې قطع کوي؟

3- د $y=x$ خط او $x^2-2y^2=4$ هایپربول د تقاطع ټکي پیداکړئ.

د څپرکي مهم ټکي

مخروطي مقاطع: د مستوي تقاطع له مخروط سره په مختلفو حالتونو کې مختلف منحني ګان منځ ته راوړي چې د مخروطي مقاطعو په نوم یادیږي.

بیضوي: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو مستقرو ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل یو ثابت اوږدوالی وي، بیضوي بلل کیږي، مستقر ټکي چې په F' او F تورو ښودل شوي، د بیضوي محراقونه بلل کیږي او $AA'=2a$ ثابت اوږدوالی دی

محراقونه	دلنډ قطر انجامونه	د اوږده قطر انجامونه	د مرکز وضعیه کمیات	معادلې	شمېره
$(c,0),(-c,0)$	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې دي	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,0)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b$	1
$(0,c),(0,-c)$	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور باندې دي	$(0,0)$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	2
$(h\pm c,k)$	$(h,k\pm b)$ په لنډ قطر باندې چې د y له محور سره موازي دی	$(h\pm a,k)$ په لوی قطر باندې چې د x له محور سره موازي دی	(h,k)	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	3
$(h,k\pm c)$	$(h\pm b,k)$ په لنډ قطر باندې چې د x له محور سره موازي دی	$(h,k\pm a)$ په لوی قطر باندې چې د y له محور سره موازي دی	(h,k)	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	4

د بیضوي عمومي معادله عبارت ده له: $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$

په داسې حال کې چې A او C دواړه هم علامه وي.

پارابولا: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د یوه ثابت یا مستقر ټکي او ثابت مستقیم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کیږي، دغه ثابت یا مستقر ټکي ته د پاراپولا محراق (F) او ثابت مستقیم خط ته د پارابولا هادي(موجه) وایي.

تناظري محور	د موجه خط معادله	د محراق مختصات	دراس وضعیه کمیات	د پارابولا معادلې	شمېره
$x=0$	$x=-p$	$F(P,0)$	$S(0,0)$	$y^2=4Px$	1
$y=0$	$y=-p$	$F(0,P)$	$S(0,0)$	$x^2=4Py$	2
$y=k$	$x=h-p$	$F(h+p,k)$	$S(h,k)$	$(y-k)^2=4P(x-h)$	3
$x=h$	$y=k-p$	$F(h,k+p)$	$S(h,k)$	$(x-h)^2=4P(y-k)$	4

د پارابولا عمومي معادله $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ په داسې حال کې چې $A=0$ یا $C=0$ وي، نه دواړه ($C\neq 0, A=0$ یا $C=0, A\neq 0$ وي)، په پارابولا کې عن المرکزیت $e=1$ سره دی.

هایپربولا: په یوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ثابتو مستقرو ټکو څخه تل ثابت اوږدوالی ولري، هایپربولا بلل کیږي.

د مجانبونو معادلې	د موجه خطونو معادلې	محراقونه	غیر حقیقي رأسونه	د رأسونو وضعیه کمیات	د مرکز وضعیه کمیات	د هایپربولا معادلې
$y=\pm\frac{b}{a}x$	$x=\pm\frac{a}{c}$	$F(c,0)$ $F'(-c,0)$ د x پر محور باندې	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$y=\pm\frac{a}{b}x$	$y=\pm\frac{a}{c}$	$F(0,\pm c)$ د y پر محور باندې.	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې.	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	$x=h\pm\frac{a}{c}$	$F(h\pm c,k)$	$B(h,k\pm b)$	$A(h\pm a,k)$	$S(h,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$	$y=k\pm\frac{a}{c}$	$F(h,k\pm c)$	$B(h\pm b,k)$	$A(h,k\pm a)$	$S(h,k)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

د هایپربولا عمومي معادله $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ څخه عبارت ده، په داسې حال کې چې $A=B$ یا $A\neq B$، خو مختلف الاشاره وي. په هایپربولا کې عن المرکزیت $e>1$ دی.

د څپرکي پوښتني

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب یې په نښه او کرښه ترې تاو کړئ.

1- که چېرې یو مستوي یو مخروط په مایل ډول قطع کړي، نو د مستوي او مخروط ګډ فصل عبارت دی له:

$a)$ بیضوي　　$b)$ دایره　　$c)$ هایپربولا　　$d)$ دوه متقاطع خطونه

2- د بیضوي محراقونه هغه ټکي دي چې د بیضوي له مرکز څخه:

$a)$ برابر واټن لري　　$b)$ مختلف واټنونه لري

$c)$ د اوږد قطر نیمایي واټن لري　　$d)$ د لنډ قطر نیمایي ده.

3- که چیرې M د بیضوي یو ټکی F او F' محراقونه او $2a$ د اوږده قطر اوږدوالی وي، نو په دې صورت کې لرو چې:

$|MF|-|MF'|=2a \quad (a$　　$|MF|+|MF'|=a \quad (b$

$|MF|+|MF'|=2a \quad (c$　　$|MF'|+|MF|=0 \quad (d$

4- د بیضوي عن المرکزیت له لاندې کومې یوې رابطې څخه په لاس راځي:

$e=\dfrac{a}{c}$:(a　　$e=\dfrac{c}{a}$:(b　　$e=\dfrac{b}{c}$:(c　　$e=\dfrac{c}{b}$:(d

5- په بیضوی کې د لنډ قطر، اوږد قطر او محراقونو ترمنځ اړیکه عبارت ده له:

$a^2=b^2-e^2 \quad (a$　　$a^2+b^2=c^2 \quad (b$

$a^2=b^2+e^2 \quad (c$　　$a^2=b^2+c^2 \quad (d$

6- د $(y-k)^2=4p(x-h)$ په معادله کې که $p>0$ سره وي، نو:

$a)$ د پارابولا خوله پاس خواته خلاصه ده.　　$b)$ دپارابولا خوله لاندې خواته خلاص ده

$c)$ دپارابولا خوله ښي خواته خلاص ده　　$d)$ دپارابولا خوله کیڼې خواته خلاص ده.

7- د $(x+1)^2=8(y-2)$ پارابولا معادله په پام کې ونیسئ. د محراق وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$F(-1,-2) \quad (a$　　$F(-1,4) \quad (b$　　$F(-1,2) \quad (c$　　$F(-4,-1) \quad (d$

8- که چېرې F او F' د هایپربولا محراقونه وي، د p ټکی په کوم شرط د هایپربولا د محیط یو ټکی کېدلای شي؟

$|PF|+|PF'|=2a \quad (a$　　$|PF|-|PF'|=a \quad (b$

$|PF|-|PF'|=2a \quad (c$　　$|PF|-|PF'|=0 \quad (d$

9- د $y = x^2$ د پارابولا گراف متناظر دی نظر:

a) د y محور ته

b) د x محور ته

c) د x او y محوررونو ته

c) د وضعیه کمیاتو مبدأ ته

10- په لاندې ځوابونو کې کوم یو د هایپربولا عن المرکزیت ښيي؟

a) $e < 1$

b) $e = 1$

c) $e > 1$

d) $e = -1$

11- د $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ د بیضوي د اوږد قطر موقعیت:

a) د y پر محور باندې دی.

b) د x پر محور باندې دی.

c) د x پر محور عمود دی.

d) د y له محور سره موازي دی.

12- په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له یوه ثابت ټکي څخه مساوي فاصلې لري. د څه په نامه یادېږي؟

a) کره

b) دایره

c) پارابولا

d) بیضوي

13- د $y^2 = -4(x+2)$ پارابول دراس مختصات عبارت دي له:

a) $(2,4)$

b) $(4,2)$

c) $(2,0)$

d) $(-2,0)$

14- د $4x^2 + 4y^2 + 8y + 3 = 0$ معادله عبارت ده له:

a) دایرې

b) بیضوي

c) پارابولا

d) هایپربولا

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، لومړی هغه په معیاري ډول ولیکئ، بیا يې گرافونه رسم کړئ.

$a)\ x^2 + 4y^2 = 4$

$b)\ 9x^2 + 2y^2 = 15$

$c)\ 16x^2 - 96x + 9y^2 + 90y + 225 = 0$

$d)\ x^2 + 12x - 120y + 288 = 0$

2- د لاندې قیمتونو له مخې د هرې یوې بیضوي معادله پیدا کړئ:

a) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $a = 4$ ، $e = 0,8$ دي او کبیر قطر يې د y پر محور باندې پروت دی.

b) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $b = 6$ $e = 0,8$ دي او کبیر قطر يې د x پر محور باندې پروت دی.

3- په لاندې معادلو کې د بیضوي کبیر قطر، صغیر قطر، د راسونو او محراقونو مختصات پیدا کړئ.

a) $4(x-1)^2 + y^2 = 4$

b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

4- د پارابولا لاندې معادلې لومړی په معیاري شکل ولیکئ او بیایې ګرافونه رسم کړئ.

a) $x^2 - 11y = 0$

b) $y^2 - 4y - 4x + 2 = 0$

5- د هایپربولا لاندې هره یوه معادله په معیاري ډول واړوئ:

a) $4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0$

b) $2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0$

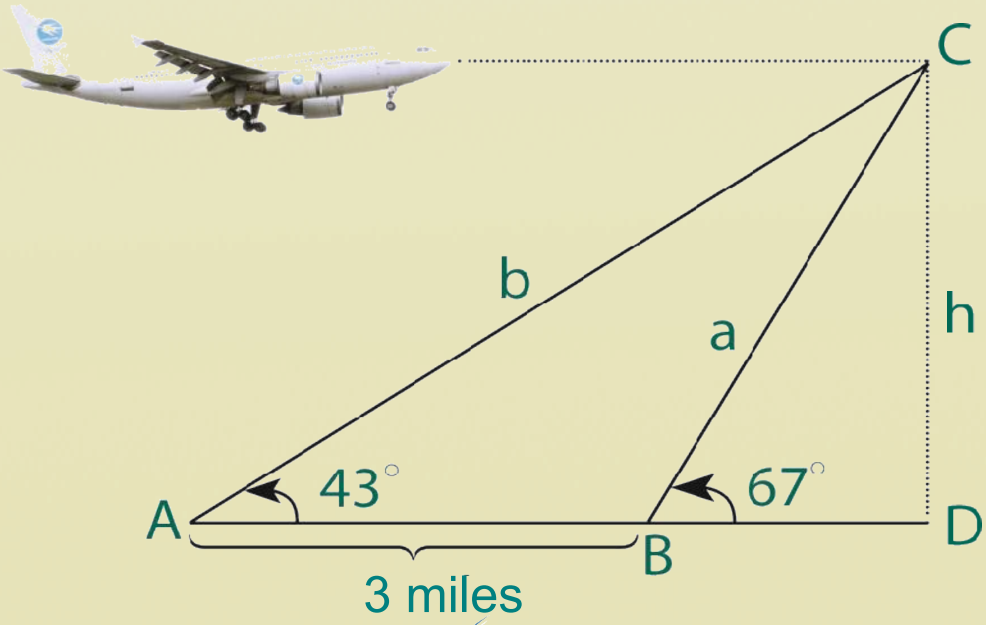
6- د هغې هایپربولا معادله پیدا کړئ چې $(-4,0)$ او $(4,0)$ د حقیقي راسونو مختصات او $y = \pm\frac{5}{4}x$ د مجانبونو معادلې وي.

7- د هغې هایپربولا معادله پیدا کړئ چې $(-1,3)$ ، $(1,3)$ د حقیقي راسونو مختصات او د محراقونو ترمنځ اوږدوالی یې 4 واحده وي.

8- د $y = 2x$ مستقیم خط د $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ هایپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

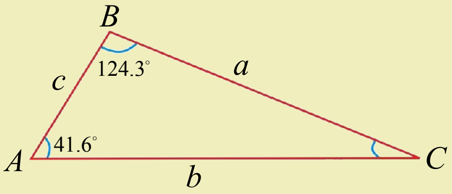
دویم څپرکی

مثلثات


C
b
a
h
43°
67°
A
B
D
3 miles

د ساین قانون

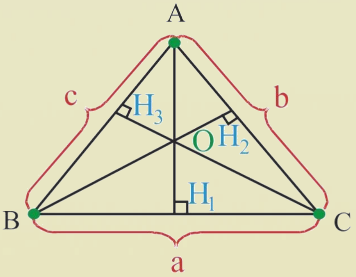
Law of sine



خرنگه کولای شو په مخامخ شکل کې د a د ضلعې او C زاویې اندازه پیدا کړو؟

فعالیت

- د ABC یو حادهالزاویه مثلث رسم او د ضلعو اوږدوالی یې وټاکئ.
- د مثلث له هر رأس څخه د هغې پرمخامخ ضلعې د($\overline{AH_1}$, $\overline{BH_3}$, $\overline{CH_2}$) ارتفاع ګانې رسم کړئ.
- د ABH_1 او ACH_1 په قایمالزاویه مثلثونو کې د ($\overline{AH_1}$) ارتفاع د $\sin B$ او $\sin C$ له جنسه پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.
- د ABH_2 او BCH_2 په قایمالزاویه مثلثونو کې د ($\overline{BH_2}$) ارتفاع د $\sin A$ او $\sin C$ له جنسه پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړې.



له پورتني فعالیت څخه لاندې ثبوت په لاس راوړای شو.

ثبوت: د ACH_1 او ACH_1 په قایمالزاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\sin B = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH_1}}{c}$$

$$\overline{AH_1} = c\sin B \quad .... \quad (1)$$

$$\sin C = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH_1}}{b}$$

$$\overline{AH_1} = b\sin C \quad .... \quad (2)$$

د (1) او (2) رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

$$c\sin B = b\sin C \,/ \div bc$$

اویا:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad .... \quad \text{I}$$

په همدې ډول د ABH_2 او BCH_2 قایم‌الزاویه مثلثونو په مرسته لیکلی شو چې:

$$\sin A = \frac{\overline{BH_2}}{c} \Rightarrow \overline{BH_2} = c\sin A \;......... (3)$$

$$\sin C = \frac{\overline{BH_2}}{a} \Rightarrow \overline{BH_2} = a\sin C \;......... (4)$$

د (3) او (4) د رابطو له پرتلې څخه لرو چې: $c\sin A = a\sin C \,/ \div ac$

او یا: $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \;.......... II$$

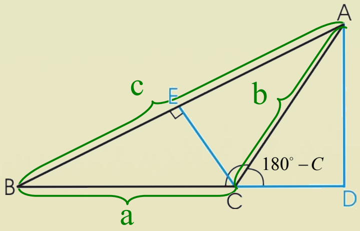
د I او II د رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې: $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

پورتنی اړیکه(رابطه) په یوه مثلث کې د ساین د قانون(Law of sine) په نامه یادېږي.

پایله: په هر $A\overset{\Delta}{B}C$ کې چې C, B, A يې زاويې او c, b, a يې د ضلعو اوږدوالی وي، لرو:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

د ساین د قضیې ثبوت په منفرج الزاویه مثلث کې:



د ABC په مثلث کې چې د C زاویه یې منفرجه ده

د $\overline{AD}$ او $\overline{CE}$ ارتفاع‌گانې رسموو.

د ADC په قایم الزاویه مثلث کې لرو: $\sin(180^\circ - C) = \dfrac{\overline{AD}}{b}$

د بلې خوا د متممو زاویو څخه پوهېږو چې: $\sin(180^\circ - C) = \sin C$

نو: $$\sin C = \frac{\overline{AD}}{b} ......(1)$$

همدارنگه د ADB له قایم الزاویه مثلث څخه لرو چې: $$\sin B = \frac{\overline{AD}}{c} ......(2)$$

اوس (1) او (2) رابطې خوا په خوا یو پر بل وېشو:

د تناسب د خواصونو له مخې د وسطینو ځایونه بدلوو. $$\frac{\sin C}{\sin b} = \frac{c}{b}$$

نو: $$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \;........ I$$

اوس د ACE قایم الزاویه مثلث له مخې لیکلی شو:

$$\sin A = \frac{\overline{CE}}{b} .....(3)$$

د BEC په مثلث کې لیدل کیږي:

$$\sin B = \frac{\overline{CE}}{a} .....(4)$$

پورته 3 او 4 رابطې خوا په خوا یو پر بل ویشو:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

که چیرې د وسطینو ځایونه بدل کړو، نو:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} ......(II)$$

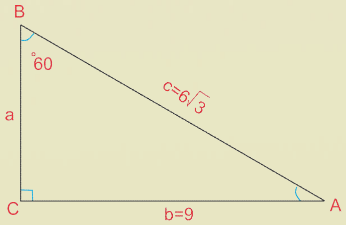
اوس د I او II رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

فعالیت

- د ساین قانون په قایم‌الزاویه مثلث کې وڅیړئ او ثبوت یې کړئ.

لومړی مثال:په لاندې ABC قایم الزاویه مثلث کې د یوې ضلعې او دوو زاویو قیمت پیدا کړئ داسې چې د یوې زاویې او دوو ضلعو قیمت درکړل شوی دی؟



حل: د ساین د قضیې یا قانون له مخې لیکلی شو چې:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{9}{\sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ}{9} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{9}$$

$$\sin C = \frac{3 \cdot 3}{9} = \frac{9}{9} = 1 \quad \Rightarrow \sin C = 1$$

څرنګه چې: $\sin 90^\circ = 1$ دی، نو: $C = 90^\circ$

همدارنګه پوهیږو چې په یوه مثلث کې:

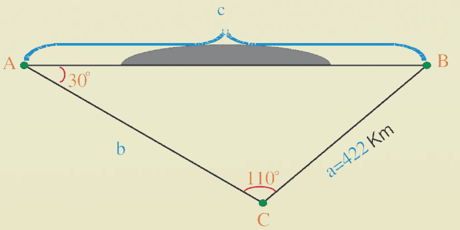
$$A + B + C = 180^\circ$$
$$A + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$
$$A = 180^\circ - 150^\circ$$
$$A = 30^\circ$$

د a ضلعې قیمت په لاندې ډول پیداکولی شو :

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}\Rightarrow a=b\cdot\frac{\sin A}{\sin B}\Rightarrow a=9\cdot\frac{\sin 30^{\circ}}{\sin 60^{\circ}}=\frac{9\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow a=\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9\cdot\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a=3\sqrt{3}\,cm$$

دویم مثال: یو ساختماني انجینر غواړي چې د دوو ټکو تر منځ واټن چې په منځ کې یې یوه غونډۍ پرته ده پیداکړي.



حل: د ساین د قانون په کارولو سره $\sin A$ او $\sin C$ ترمنځ رابطه په پام کې نیسو:

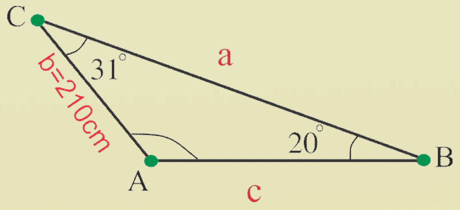
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

$$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{422km\cdot\sin 110^{\circ}}{\sin 30^{\circ}}$$

خرنګه چې: $\sin 110^{\circ}=0.9396$ او $\sin 30^{\circ}=0.5$ دی.

نو: $c=\dfrac{422km\cdot 0.9396}{0.5}\Rightarrow c=793.0224km$

دریم مثال: په مخامخ شکل کې د دوو زاویو او یوې ضلعې اندازه درکړل شوې ده، د یوې نامعلومې زاویې او دوو ضلعو اندازې پیداکړئ.



حل: پوهیږو چې د یوه مثلث د داخلي زاویو مجموعه 180° ده؛ نو نامعلومه زاویه یې داسې پیداکولی شو:

$$A=180^{\circ}-(31^{\circ}+20^{\circ})=180^{\circ}-51^{\circ}$$

$$A=129^{\circ}$$

د a ضلعې د اوږدوالي د پیداکولو لپاره د ساین قانون په پام کې نیسو:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b} \quad \Rightarrow \frac{\sin 129^\circ}{a}=\frac{\sin 20^\circ}{210}$$

$$\Rightarrow a=\frac{\sin 129^\circ \cdot 210cm}{\sin 20^\circ}$$

څرنګه چې $\sin 20^\circ = 0.342$ او $\sin 129^\circ = 0.7771$ دي؛ نو:

$$a=\frac{0.7771\cdot 210}{0.342}=\frac{163.191}{0.342}=477.166cm$$

$$a=477.166cm$$

اوس د c ضلعې اوږدوالی د $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ له رابطې څخه پیدا کوو:

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c} \quad \Rightarrow \frac{\sin 20^\circ}{210}=\frac{\sin 31^\circ}{c}$$

$$\Rightarrow c=\frac{210cm\cdot \sin 31^\circ}{\sin 20^\circ}$$

څرنګه چې $\sin 31^\circ = 0.5150$ دی د قیمتونو په ایښودلو سره لیکلای شو چې:

$$\Rightarrow c=\frac{210\cdot 0.5150}{0.342}=\frac{108.15}{0.342}=316.228cm$$

یادونه:

د ساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

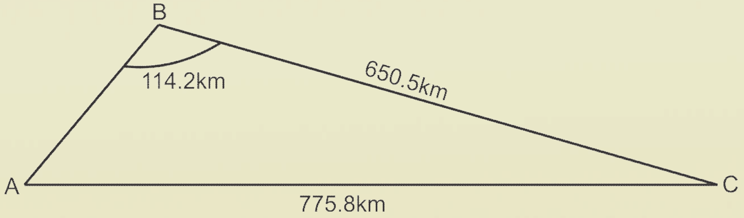
- دوې زاويې او د معلومې زاويې مخامخ ضلع يې معلومه وي، يعنې: ($A\ \ AS$).
- دوه ضلعې او د معلومې ضلعې مخامخ زاويه يې معلومه وي، يعنې:(SAS).

باید ووایو چې دلته A د Angle او s د side مخفف دي.

پوښتنې

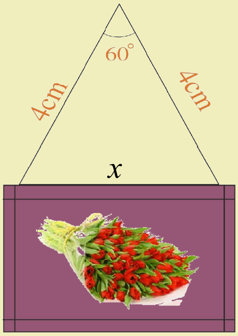
1. که چیرې د یوه قایم الزاویه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a = 8m$, $b = 6m$ او $c = 10m$ وي، د مثلث د زاویو اندازه پیدا کړئ.

2. لاندې شکل په پام کې ونیسئ د A او B د ښارونو ترمنځ واټن پیدا کړئ؟



د کوساین قانون

Law of cosine

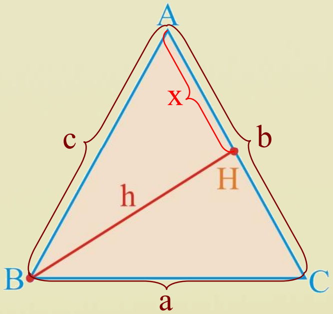


د یوه شکل چارت د مېخ په مرسته د دېوال پـر مـخ ځـړول شوی دی، که چېرې د مېخ د دوو خواوو د تار اوږدوالی هر یـو $4cm$ وي او د منـځ زاویـه یـې 60° وي، د تـار د دوو ټکو ترمنځ واټن (x) څرنګه پیداکولی شو؟

فعالیت

- د ABC کیفي مثلث رسم او د C, B, A راسونو مخامخ ضلعې په ترتیب سره په c, b, a وښایاست.
- د B له رأس څخه د $\overline{AC}$ پر ضلع د H په ټکی کې ارتفاع رسم کړئ.
- په جوړ شوو قایم‌الزاویه مثلثونو کې د فیثاغورث قضیه تطبیق کړئ.
- په ABH قایم‌الزاویه مثلث کې د $\overline{AH}$ قیمت د A زاویې د کوساین د له جنسه پیـدا او د فیثـاغورث په رابطه کې یې وضع کړئ.
- ممکنه الجبري محاسبې ترسره او وروستۍ رابطه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت د سرته رسولو څخه وروسته داسې ثبوتوو:



ثبوت: د ABC په حادةالزاویـه مثلـث کې د $\overline{BH}$ ارتفـاع رسـموو

$$\overline{CH} = b - x \quad , \quad \overline{AH} = x \quad , \quad \overline{BH} = h$$

د BCH په قایم الزاویه مثلث کې لرو:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$a^2 = (b-x)^2 + h^2 \quad .... \quad \text{I}$$

د AHB په قایم الزاویه مثلث کې د h اوږدوالی پیداکوو:

$$h^2 = c^2 - x^2 \quad .... \quad \text{II}$$

د I په رابطه کې د h^2 قیمت لیکو

$$a^2 = (b-x)^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

د AHB په قایم‌الزاویه مثلث کې:

$$\cos A = \frac{x}{c} \quad \Rightarrow \quad x = c \cdot \cos A$$

په $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$ رابطه کې د x پر ځای $c \cdot \cos A$ قیمت ایږدو، نو:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \text{یا} \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

پایله: په یو اختیاری مثلث کې مو دا

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \ldots I \qquad \text{یا} \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

رابطه ثبوت کړه، په همدې ډول لاندې رابطې هم ثبوت کولای شو.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \ldots . II \qquad \text{یا} \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \ldots . III \qquad \text{یا} \qquad c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$$

په هر مثلث کې د یوې زاویې کوساین (Cos) مساوی دی د زاویې د دواړو ضلعو د مربعاتو مجموعه منفي د زاویې د مقابلې ضلعې مربع د زاویې د دواړو ضلعو د حاصل ضرب په دو چند باندې.

فعالیت

- د تیرمخ د مثلث د شکل په مرسته د کوساین قانون د II او III رابطې ثبوت کړئ.

یادونه: د کوساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

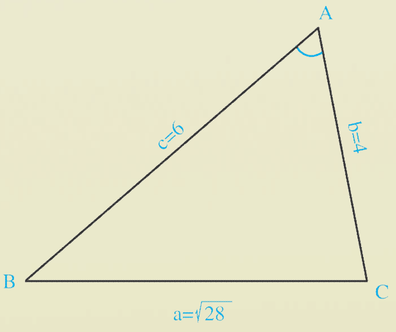
- چې دوې ضلعې او د منځ زاویه یې معلومه وي. (SAS).
- د مثلث درې ضلعې معلومې وي. (SSS).

د ساین او کوساین د قانون له کارولو څخه، د مثلث د عناصرو د پیداکولو لپاره له لاندې جدول څخه کار اخلو:

د یوه مثلث د عناصرو پیدا کول	
کله چې د یوه مثلث د دریو ضلعو اوږدوالی معلوم وي، د کوساین له قانون څخه ګټه اخلو.	(SSS) (ضلع، ضلع، ضع
کله چې د یوه مثلث د دوو زاویو او د یوې معلومې زاویې د مقابلې ضلعې اندازه معلومه وي، د ساین له قانون څخه ګټه اخلو.	SAA (زاویه، زاویه، ضلع)
کله چې د یوه مثلث د دوو ضلعو او د یوې معلومې ضلعې د مقابلې زاویې اندازه معلومه وي، د ساین له قانون څخه ګټه اخلو.	ASA (زاویه، ضلع، زاویه)
کله چې د یو مثلث د دوو ضلعو او د هغوی ترمنځ د زاویې اندازه معلومه وي، د کوساین له قانون څخه ګټه اخلو.	SAS (ضلع،زاویه، ضلع)
امکان نه لري	AAA (زاویه، زاویه، زاویه)

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې د هغو دریو ضلعو اندازې په لاندې ډول راکړل شوي دي، د A زاویې اندازه وټاکئ.

حل:



$$a=\sqrt{28}\quad,\quad b=4\quad,\quad c=6\quad,\quad A=?$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$

$$(\sqrt{28})^2=(4)^2+(6)^2-2\cdot4\cdot6\cos A$$

$$28=16+36-48\cos A\quad\Rightarrow\quad 28=52-48\cos A$$

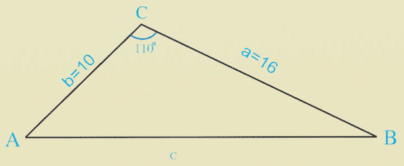
$$48\cos A=52-28\quad\Rightarrow\quad 48\cos A=24$$

$$\cos A=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{A=60^\circ}$$

دویم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالی $a=16$, $b=10$ واحده او د منځ زاویه یې $C=110^\circ$ وي، د c ضلعې اوږدوالی یې پیدا کړئ.

حل:



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

$$c^2=(16)^2+(10)^2-2(16)(10)\cos110^\circ$$

$$c^2=256+100-320\cos110^\circ$$

$$c^2=356-320\cos110^\circ$$

$$c=\sqrt{356-320\cos110^\circ}$$

څرنګه چې: $\cos110^\circ=-0.342$ دی، نو:

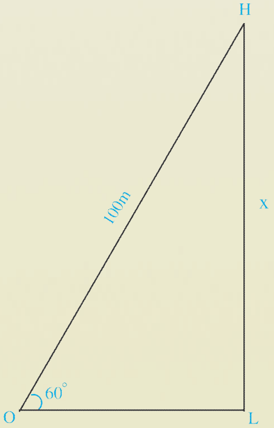
$$c=\sqrt{356-320(-0.342)}\quad\Rightarrow\quad c=\sqrt{356+109.44}$$

$$\boxed{c=21.57}$$

درېیم مثال: یو پتنګ (کاغذ پران) له $100\,m$ تار سره په هوا کې دی، که تار د ځمکې له سطحې سره 60° زاویه جوړه کړې وي، له ځمکې څخه د پتنګ لوړوالی پیدا کړئ.

حل: د OHL په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$\cos60^\circ=\frac{\overline{OL}}{\overline{OH}}=\frac{x}{100}\quad\Rightarrow\quad x=100\cdot\cos60^\circ=100\cdot\frac{1}{2}=50m$$



د کوساین قانون له مخې لرو چې:

$$\overline{HL}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OL}^2 - 2\overline{OH}\cdot\overline{OL}\cdot\cos 60^\circ$$

$$\overline{HL}^2 = (100)^2 + (50)^2 - 2\cdot 100\cdot 50\cdot\frac{1}{2}$$

$$\overline{HL}^2 = 10000 + 2500 - 5000$$

$$\overline{HL}^2 = 7500m^2 \quad \Rightarrow \overline{HL} = \sqrt{7500}m = 50\sqrt{3}\,m$$

$$\overline{HL} = 86.6m$$

څلورم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې $\hat{A} = 60^\circ$, $b = 5, c = 8$ وي، د a او $\sin C$ اندازه پیدا کړئ.

حل: لومړی د کوساین د قضیې په کارولو سره د a ضلع او بیا $\sin C$ پیدا کوو.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 + 64 - 80\cdot\frac{1}{2} = 89 - 40$$

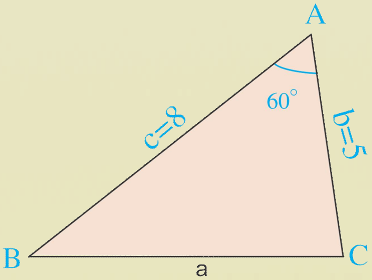
$$a^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad a = 7$$

د ساین د قضیې له مخې لیکو چې:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\sin C = \frac{c\cdot\sin A}{a} = \frac{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$



پوښتنې

1. که چېرې د ABC په مثلث کې $b = 4\,ft, a = 5\,ft$ او $A = 45^\circ$ وي، د مثلث نامعلومې ضلعې او زاویې پیدا کړئ.

2. که چېرې په یوه مثلث کې $a = 3cm$ او $b = 9cm$ او د دوی ترمنځ زاویه 60° وي د c د ضلعې اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

د ټانجنټ قانون

Law of tangent

آیا په هـر مثلـث کـې د زاویـو او ضـلعو تـرمنځ مخامخ اړیکه شتون لري؟

فعالیت

- د ساین قانون رابطه ولیکئ او هغه له D سره مساوي په پام کې ونیسئ.
- د $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$ تناسب هر نسبت په جلا جلا ډول مساوي له D سره ولیکئ.
- پورته دوه نسبتونه د ضلعو د اوږدوالي له مخې ولیکئ.
- دوه پورتنۍ اړیکې لومړی جمع او بیا یې تفریق کړئ.
- لاس ته راغلې اړیکې یو پر بل ووېشئ.
- الجبري محاسبې ترسره او د پایلې فورمول ولیکئ.

د پورته فعالیت د سرته رسولو وروسته لاندې پایله لاس ته راځي.

پایله: په هر مثلث کې د ټانجنټ قانون عبارت ده له :

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

ثبوت: د ساین قانون دوه نسبتونه له D سره مساوي لیکو:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=D$$

$$\frac{a}{\sin A}=D \Rightarrow a=D\sin A \quad , \quad \frac{b}{\sin B}=D \Rightarrow b=D\sin B$$

پورتنۍ اړیکې لومړی جمع او بیا تفریقوو:

$$a+b=D(\sin A+\sin B)$$

$$a-b=D(\sin A-\sin B)$$

پورتنۍ اړیکې یو پر بل وېشو:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$$

د ضرب له فورمولونو څخه لرو:

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\tan\frac{A+B}{2}\cdot\cot\frac{A-B}{2}$$

خرنگه چې $\cot\frac{A-B}{2}=\frac{1}{\tan\frac{A-B}{2}}$ دی.

نو په پایله کې لیکلی شو چې:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فعالیت

- لاندې رابطې ثبوت کړئ.

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}\quad,\quad\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

- پورتنی رابطې په یوه مثلث کې د ټانجنټ قانون بلل کېږي.

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې $\frac{b-c}{b+c}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ او $A=90^\circ$ دی، د B او C زاویو اندازه پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې په هر مثلث کې:

$$A+B+C=180^\circ$$

$$\Rightarrow B+C=180^\circ-A=180^\circ-90^\circ\Rightarrow B+C=90^\circ\quad ...I$$

$$B+C=90^\circ\Rightarrow\frac{B+C}{2}=45^\circ$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan 45^\circ}$$

خرنگه چې $\tan 45^0=1$ سره ده، نو:

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

پوهېږو چې $\tan 30=\sqrt{\frac{3}{3}}$ سره ده، نو:

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \tan 30^\circ=\tan\frac{B-C}{2}$$
$$\frac{B-C}{2}=30^\circ \Rightarrow B-C=60^\circ \quad ...II$$

له I او II اړیکو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

$$B-C=60^\circ \quad .... \text{ I}$$
$$B+C=90^\circ \quad .... \text{ II}$$
$$2B=150^\circ$$
$$\boxed{B=75^\circ}$$

اوس د B قیمت په ایښودلو سره د C زاویه پیدا کوو:

$$B-C=60^\circ$$
$$75^\circ-C=60^\circ$$
$$-C=60^\circ-75^\circ$$
$$\boxed{C=15^\circ}$$

دوییم مثال: که چیرې د ABC په مثلث کې $B=42^\circ\ \ 30'$, $c=432$ او $a=925$ وي، د تانجنټ قانون څخه په ګټې د مثلث نورې نامعلومې اجزاوې پیدا کړئ.

حل:

$$A+B+C=180^\circ \Rightarrow A+C=180^\circ-B \Rightarrow A+C=180^\circ-42^\circ\ \ 30'$$
$$\Rightarrow A+C=179^\circ\ 60'-42^\circ\ \ 30' \Rightarrow A+C=137^\circ\ 30' \quad .... \text{ I}$$
$$\frac{A+C}{2}=\frac{137^\circ\ 30'}{2}\Rightarrow \frac{A+C}{2}=\frac{136^\circ\ 90'}{2}=68^\circ\ \ 45'$$
$$\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{a+c}{a-c}\Rightarrow \frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{925+432}{925-432} \Rightarrow \frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{1357}{493}$$
$$\Rightarrow 1357\cdot\tan\frac{A-C}{2}=493\cdot\tan 68^\circ\ 45' \Rightarrow \tan\frac{A-C}{2}=\frac{493}{1357}\cdot\tan 68^\circ\ 45'$$

له مثلثاتي جدول څخه پوهېږو چې $\tan 68^\circ\ 45' = 2.571$ دی؛ نو:

$$\tan\frac{A-C}{2} = 0.363 \cdot 2.571 \ \Rightarrow \tan\ \frac{A-C}{2} = 0{,}933$$

$$\Rightarrow \frac{A-C}{2} = 43^0 \Rightarrow \boxed{A - C = 86^\circ \quad \ldots\ldots\ \text{II}}$$

اوس د I او II رابطو په پام کې نیولو سره د A زاویې قیمت پیدا کوو:

$$A + C = 137^\circ\ 30' \quad \ldots I$$

$$\underline{A - C = 86^\circ \qquad} \ldots II$$

$$2A = 223^\circ\ 30 \Rightarrow 2A = 222^\circ\ 90' \Rightarrow A = 111^\circ 45'$$

اوس غواړو د C زاویې قیمت پیدا کړو:

$$A + C = \ 137^\circ 30' = 136^\circ 90'$$

$$\Rightarrow C = 136^\circ\ \ 90' - A = 136^\circ 90' - 111^\circ 45'$$

$$\Rightarrow C = 25^\circ 45'$$

اوس د ساین قانون په مرسته د b ضلعې اوږدوالی پیدا کوو:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = c \cdot \frac{\sin B}{\sin C}$$

$$b = 432 \cdot \frac{\sin 42^\circ 30'}{\sin 25^\circ\ \ 45'}$$

په پورته رابطه کې د زاویو د ساین قیمتونه لیکو:

$$\sin 25^\circ\ \ 45' = 0.434$$

$$\sin 42^\circ\ \ 30' = 0.676$$

$$b = 432 \cdot \frac{0.676}{0.434} = 672.885$$

پوښتنې

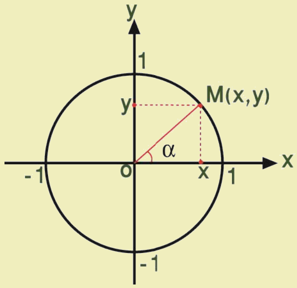
د مثلث نامعلومې اجزاوې د ټانجنټ قانون په کارونې سره پیدا کړئ.

a) که چېرې $a = 35\,ft$, $B = 60^\circ$ او $C = 75^\circ$ وي.

b) که چېرې $A = 45^\circ$, $b = 37m$ او $B = 75^\circ$ وي.

مثلثاتي مطابقتونه

Trigonometry identities



پـوهېږو چـې $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ يـو الجبـري مطابقـت دی، ځکـه د a او b پـه ټولـو قيمتونـو سـره د مساوات داوړه خواوې برابرېږي.

آيا $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ يو مثلثاتي مطابقت کېدلی شي؟

فعاليت

- په لاندې جدول کې د α د مختلفو قيمتونو لپاره د A او B افادو قيمتونه بشپړ کړئ.

α	$A=\dfrac{\cot\alpha}{\csc\alpha-1}$	$B=\dfrac{\csc\alpha+1}{\cot\alpha}$
0°		
30°		
45°		
60°		
90°		

- د جدول له بشپړولو څخه وروسته د A او B قيمتونه پرتله او رابطه يې وليکئ.

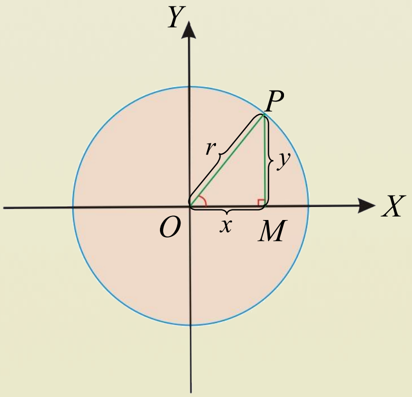
له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف لاس ته راځي.

تعريف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې پـه ټولـو قيمتونـو سره ، د مساوات دواړه خـواوې برابـرې شـي، مثلثاتي مطابقت بلل کيږي،لکه:

$$\frac{\cot\alpha}{\csc\alpha-1}=\frac{\csc\alpha+1}{\cot\alpha}$$

که α هر قيمت واخلي، د پورته مساواتو دواړه خواوې مساوي کيږي.

د $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ مطابقت ثبوت کړئ.



ثبوت: د $C(O,r)$ په دايره کې د OMP قايم‌الزاويه مثلث

د سموو او کولای شو ويې ليکو:

$$\sin\alpha=\frac{y}{r} \text{ او } \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

د فيثاغورث د قضيې څخه کولای شو وليکو:

$$y^2+x^2=r^2$$

د مساوات دواړه خواوې په r^2 ويشو:

$$(\frac{x}{r})^2+(\frac{y}{r})^2=1 \quad \text{يا} \quad \frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}$$

اوس د $\frac{y}{r}$ په ځای $\sin\alpha$ او $\frac{x}{r}$ په ځای $\cos\alpha$ ليکو.

نو ليکلی شو: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

د مثلثاتو اساسي رابطې عبارت دي له:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad , \quad 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha \quad , \quad 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

د مثلثاتو فرعي رابطې عبارت دي له:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \quad , \quad \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha} \quad , \quad \sin\alpha\cdot\csc\alpha=1 \quad , \quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tag\ \alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1 \quad , \quad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$$

اوس غواړو د $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ رابطه ثبوت کړو.

ثبوت: د فيثاغورث د قضيې په کارلو سره ليکو $x^2+y^2=r^2$

د مساوات دواړه خواوې په x^2 ويشو. $\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}\Rightarrow 1+(\frac{y}{x})^2=(\frac{r}{x})^2$

په نتيجه کې په پورته افاده کې د $\frac{r}{x}=\sec\alpha$ او $\frac{y}{x}=\tan\alpha$ د قيمتونو په اېښودلو سره کولای شو

وليکو: $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$

فعالیت

- د مثلثاتي نسبتونو په کارولو سره ثبوت کړئ چې:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \quad , \quad 1+\cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

په عمومي توګه د مطابقتونو د حل یا ثبوت لپاره د مساوات د یوې خوا له افادې څخه د بلې خوا افاده لاس ته راوړو، یعنې د مطابقتونو یوې خواته مختلفې عملیې لکه: مربع کول، تجزیه، ضرب او نورې عملیې سر ته رسوو، څو د بلې خوا افاده لاس ته راشي، که چېرې د یوې الجبري افادې حدود د یوې یا څو زاویو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه وي، مثلثاتي افاده بلل کېږي، د مثلثاتي رابطو په واسطه مثلثاتي افادې ساده کولی شو. د موضوع د لا ښه پوهېدو لپاره لاندې مثلثاتي مطابقتونو مثالونه په پام کې ونیسئ.

لومړی مثال: د $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha\cdot\tan\alpha\cot\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل:

$$\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

دویم مثال: د $\sin^2\beta\cdot\cot^2\beta+\cos^2\beta\cdot\tan^2\beta+\tan^2\beta = 1+\tan^2\beta$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل: په لاندې ډول افاده ساده کوو:

$$\sin^2\beta\cot^2\beta+\cos^2\beta\tan^2\beta+\tan^2\beta = \sin^2\beta\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\cos^2\beta\cdot\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$$

$$+\tan^2\beta = \cos^2\beta+\sin^2\beta+\tan^2\beta = 1+\tan^2\beta$$

دریم مثال: لاندې افاده د $\cos\beta$ له جنسه حساب کړئ.

$$(1-\sin^2\beta)\ (1+\sec^2\beta) = ?$$

حل: $$(1-\sin^2\beta)(1+\sec^2\beta) = \cos^2\beta(1+\frac{1}{\cos^2\beta}) = \cos^2\beta(\frac{\cos^2\beta+1}{\cos^2\beta}) = \cos^2\beta+1$$

څلورم مثال: ثبوت کړئ چې $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

حل:د مطابقت د کیڼ اړخ قوسونو ته انکشاف ورکوو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$$

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=2$$

$$2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2\cdot 1=2$$

پنځم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

حل:

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

$$\frac{\sin^2 A+(1+\cos A)^2}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+1+2\cos A+\cos^2 A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$\frac{1+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2(1+\cos A)}{\sin A(1+\cos A)}=2\cdot\frac{1}{\sin A}=2\csc A$$

شپږم مثال: وښایاست چې $\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\tan^2 A$

حل:

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A$$

$$1+\cot^2 A=\csc^2 A$$

$$\frac{\sec^2 A}{\csc^2 A}=\tan^2 A \quad\Rightarrow\quad \frac{\dfrac{1}{\cos^2 A}}{\dfrac{1}{\sin^2 A}}=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2=(\tan A)^2=\tan^2 A$$

اووم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

حل: د کيڼې خوا په افاده کې د $\cot\alpha$ او $\tan\alpha$ قيمتونه د $\sin\alpha$ او $\cos\alpha$ له جنسه ايږدو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=(\sin\alpha+\cos\alpha)\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

اتم مثال: د $\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\tan x+\cot y$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\sin y}$$

$$=\frac{\cos x\cos y}{\cos x\sin y}+\frac{\sin x\sin y}{\cos x\sin y}=\frac{\cos y}{\sin y}+\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\cot y+\tan x=\tan x+\cot y$$

نهم مثال: د $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل: پوهېږو چې $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\Rightarrow\sin^2\frac{x}{2}=(\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}})^2=\frac{1-\cos x}{2}$ دی.

اوس د معادلې ښۍ خوا په $\frac{\tan x}{\tan x}$ کې ضربوو؛ نو:

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x}{\tan x}\cdot\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\tan x\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-(\frac{\sin x}{\cos x})\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

لسم مثال: د $\dfrac{1+\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=2\sec x$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+2\sin x++\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+2\sin x+1}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2+2\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{2(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2}{\cos x}=2\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=2\sec x$$

پوښتني

1. د مثلثاتو د اساسي رابطو په پام کې نیولو سره د هرې پوښتنې معادله افاده پیدا کړئ.

$a)\ \dfrac{\sin 250^\circ}{\cos 250^\circ}$ $\qquad b)\ \sqrt{\sec^2\beta-1}$ $\qquad c)\ \dfrac{1}{\cos 80^\circ}$

2. هره افاده د $\sin\beta$ له جنسه پیدا کړئ.

$a)\ \cot\beta\cos\beta$, $\qquad b)\ \cot^2\beta$

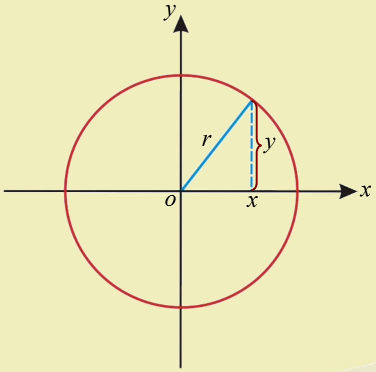
3. لاندې مطابقتونه ثبوت کړئ.

$a)\ \dfrac{\csc\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha}=\cos\alpha$ $\qquad b)\ \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos 2x$

$c)\ \dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$ $\qquad d)\ \dfrac{\tan x-\cot x}{\tan+\cot x}=1-2\cos^2 x$

مثلثاتي معادلې

Trigonometric equation



پوهېږو چې $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ يو مثلثاتي مطابقت دی، آيا $\sin\alpha+\cos\alpha=1$ يو مطابقت دی که يوه معادله؟

فعاليت

- په لاندې جدول کې د $1-2\sin\beta=0$ او $1+tag^2\beta=\sec^2\beta$ د β د کومو قيمتونو لپاره صحيح دي.

β	$1-2\sin\beta=0$	$1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$
0°		
30°		
60°		
90°		

- د β د مختلفو قيمتونو لپاره د $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ او $1-2\sin\beta=0$ ترمنځ څه توپير شتون لري.

_ آيا $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ يو مطابقت دی، که يوه معادله؟

_ آيا $1-2\sin\beta=0$ يو مطابقت دی، که يوه معادله؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف په لاس راځي.

تعريف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ځينو قيمتونو سره د مساوات دواړه خواوې مساوي کېږي، مثلثاتي معادله بلل کېږي.

هر مثلثاتي مطابقت يوه معادله کېدلی شي، خو هره مثلثاتي معادله، مثلثاتي مطابقت نه شي کېدلای.

هره مثلثاتي معادله له لاندې څلورو حالتونو څخه په يو حالت باندې حل کولی شو.

لومړی حالت: $a\sin\alpha + b = 0$

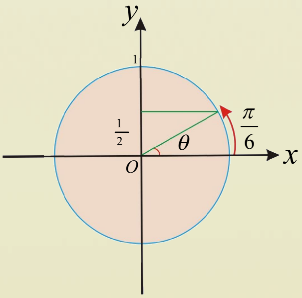
د پورتنۍ معادلې په حل کې د مناسب ځواب د پیداکولو لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

مثال: د $2\sin x - 1 = 0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیداکړئ.

حل: لومړی د $\sin x$ قیمت لاسته راوړو: $2\sin x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2}$

اوس د $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیداکوو

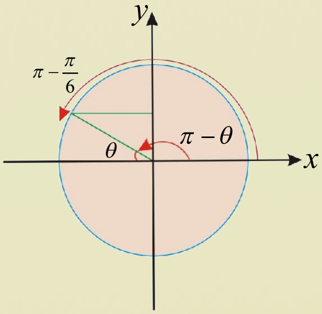
چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ شي.



$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$$

یوه مثلثاتي دایره په پام کې نیسو او هغه زاویې یې پیدا

کوو چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي.



$$x = \frac{\pi}{6}\ ,\ 2\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ 4\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ \ldots,\ 2k\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z$$

په دویمه مثلثاتي دایره کې $(\pi - \theta)$ له رابطې څخه

هغه زاویې پیداکوو چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 3\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 5\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z$$

نو د $\sin x = \frac{1}{2}$ معادلې حل په لاندې دوو سټونو کې دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{6},\ 2\pi + \frac{\pi}{6}\ ,4\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ 2k\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 3\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 5\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z\right\}$$

په عمومي ډول پورتني سټونه په لاندې ډول لیکلی شو:

$$A_1 \cup A_2 = A = \left\{x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \wedge \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ k \in Z\right\}$$

دویم مثال: د $2\sin x - 3 = 0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: $2\sin x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; 2\sin x = 3 \;\Rightarrow\; \sin x = \frac{3}{2}$

اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیداکوو چې $\sin x = \frac{3}{2}$ شي، دا چې د هرې زاویې د $\sin$ د -1 او $+1$ په منځ($-1 \le \sin x \le 1$) دی، نو هغه زاویه چې $\sin$ یې $\frac{3}{2}$ وي، وجود نه لري، نو په دې اساس معادله حل نه لري.

دویم حالت: $a\cos x + b = 0$

د پورتنۍ معادلې د حل مناسب ځواب د پیداکولو لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

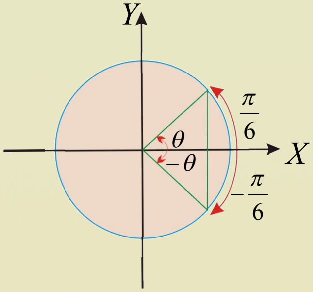
لومړی مثال: د $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل:له پورتنۍ معادلې څخه $\cos x$ لاسته راوړو:

$$2\cos x - \sqrt{3} = 0 \;\Rightarrow\; 2\cos x = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

اوس د $[0\;,\;\pi]$ په انټروال کې هغه زاویه پیداکوو یا لټوو چې $\cos$ یې $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، هغه له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت دی، نو لیکلی شو چې

$$\cos\; x = \cos\; \frac{\pi}{6}.$$



اوس د مثلثاتي دایرې په پام کې نیولو سره ټولې هغه زاویې چې $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، پیداکوو.

$$x = \frac{\pi}{6} \quad , \quad 2\pi + \frac{\pi}{6} \quad , \quad 4\pi + \frac{\pi}{6}\ldots$$

$$x = -\frac{\pi}{6} \quad , 2\pi - \frac{\pi}{6} \quad , \quad 4\pi - \frac{\pi}{6}$$

په عمومي توګه د پورتنیو حلونو سټ داسې لیکل کېږي : $x = 2n\pi \pm \theta, n = 1,2,3\ldots$

$$A = \left\{ x \,/\, x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \wedge x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}\;,\;\; k \in z \right\}$$

دویم مثال: د $2\cos x+\sqrt{2}=0$ معادله په $(0\ ,\ 2\pi)$ انټروال کې څوحلونه لري؟

حل: $2\cos x=-\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

له بلې خوا پوهیږو چې د $(0, 2\pi)$ په انټروال کې $\cos x=\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ کیږي.

له دې امله د معادلې حل $x=\dfrac{3\pi}{4}$ په لاس راځي.

د حل سټ یې مساوي دی له:

$$A=\left\{x\,/\,x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\ \wedge\ x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\ ,\ k\in z\right\}$$

لیدل کیږي چې معادله د $(0\ ,\ 2\pi)$ په انټروال کې دوه حلونه لري.

$$x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=0}x_1=\frac{3\pi}{4}$$

$$x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=1}x_2=\frac{5\pi}{4}$$

دریم حالت: $a\tan x+b=0$

د عمومي حل د پیداکولو لپاره لاندې مثالونو ته ځیر شئ.

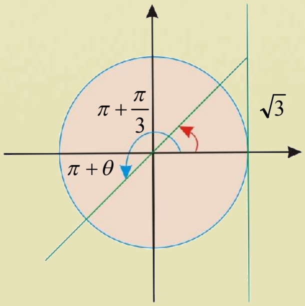
مثال: $\tan x-\sqrt{3}=0$ حل کړئ.

حل: له پورتنۍ تساوي څخه $\tan x$ په لاس راوړو: $\tan x=\sqrt{3}$

اوس د $(-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2})$ په انټروال کې د x هغه زاویه لټوو چې $\tan x=\sqrt{3}$ وي او هغه زاویه له $\dfrac{\pi}{3}$ یا 60° څخه عبارت ده.

له دې امله پورتنۍ معادله د $\tan x=\tan\dfrac{\pi}{3}$ په صورت کې لاسته راځي، په مثلثاتي دایره کې وینو چې

کومې زاویې له $\tan\dfrac{\pi}{3}$ سره مساوي دي.



$$x=\left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{3},\ .\ .\ .\right\}$$

$$x=\left\{\pi+\frac{\pi}{3},3\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ .\ .\ .\right\}$$

په عمومي ډول پورتني ستونه داسې ليکلی شو چې: $A=\left\{x / x=k\pi+\frac{\pi}{3} \quad k\in Z\right\}$

يا په عمومي ډول د هرې θ زاويې لپاره لرو چې: $A=\{x / x=k\pi+\theta \ , \quad k\in Z\}$

دويم مثال: لاندې معادله حل کړئ.

$$\tan\ x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل:

$$\tan\ x=\tan\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \ x=\frac{\pi}{6}$$

د معادلې د حل سټ $A=\left\{x / x=k\pi+\frac{\pi}{6} \quad k\in Z\right\}$

دريم مثال:د $\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})$ د معادلې حلونه د $[0\ ,\ 2\pi\ ]$ په انټروال کې لاسته راوړئ.

حل:

$$\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3}) \Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+(x+\frac{\pi}{3})$$

$$2x-x=k\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}$$

د k پر ځای صحيح عددونه ليکو، تر څو هغه زاويې چې د $[0\ ,\ 2\pi\ ]$ په انټروال کې دي، لاسته راشي.

$$x=k\pi+\frac{7\pi}{12} \begin{cases} \xrightarrow{k=0} x_1=\frac{7\pi}{12} \\ \xrightarrow{k=1} x_2=\pi+\frac{7\pi}{12}=\frac{19\pi}{12} \end{cases}$$

څلورم حالت: د $\cot x+b=0$ معادله، د معادلې د عمومي حل لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

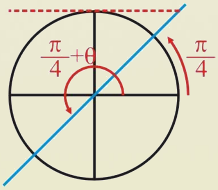
لومړی مثال: د $\cot x-1=0$ معادله حل کړئ.

حل: له پورتنی معادلې څخه $\cot x$ پيداکوو: $\cot x-1=0 \quad \Rightarrow \ \cot x=1$

اوس د $[0,2\pi]$ په انټروال کې هغه زاويه گورو چې $\cot$ يې $(+1)$ وي او هغه زاويه له $\frac{\pi}{4}$ يا 45° څخه

عبارت ده :

نو: $\cot x = \cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$



$$x = \frac{\pi}{4}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ldots$$

$$x = \pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 3\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ldots$$

نو د معادلې د حل سټونه په لاندې ډول دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{4}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ldots\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 3\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ldots\right\}$$

$$A = \left\{x / x = k\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ (2k+1)\pi+\frac{\pi}{4},\ \ k\in Z\right\}$$

یا په عمومي ډول د هرې θ زاویې لپاره داسې لیکو:

$$A = \{x / x = k\pi+\theta\ ,\ k\in Z\}$$

دریم مثال: د $\cot 3x = \cot x$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\cot 3x = \cot x \Rightarrow 3x = k\pi + x = 3x - x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}\ ,\ k\in Z$$

پوښتنې

د لاندې معادلو د عمومي حل ځوابونه پیدا کړئ.

$a)\quad 3\cos x + 5 = 0$

$b)\quad \tan x = \sqrt{3}$

دويمه درجه مثلثاتي معادلې

په تېرو درسونو کې مو ساده مثلثاتي معادلې حل کړې دي اوس دويمه درجه مثلثاتي معادلې څېړو. د مثلثاتي معادلې عمومي شکل عبارت دی له: $a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$ چې a, b, c او d ثابت عددونه دي.

$a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$

لومړی مثال: د $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: په پورتنۍ معادله کې د $\sin x$ پر ځای y ليکو، او معادله داسې ليکلی شو:

$$6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = 25 - 24 \quad \Rightarrow \Delta = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12} \quad , \quad y_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad y_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{3}$$

$$\sin x = y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = y_2 = \frac{1}{3}$$

په دې ډول هغه کوچنی زاويه چې ساين يې $\frac{1}{2}$ وي، له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت ده، نو:

$$A = \left\{ \begin{matrix} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{matrix} \qquad k \in Z \right\}$$

او يا ليکلی شو چې:

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \quad , \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

په همدې ډول د $\sin x=\frac{1}{3}$ لپاره ډېره کوچنۍ زاویه 0.33 ده او د مثلثاتي جدول لـه مخې د $\sin x=\frac{1}{3}$ لپاره $19^\circ\ 30'$ یا $\frac{13\pi}{120}$ دی.

$$A=\left\{\begin{cases} x=2k\pi+\frac{13\pi}{120} \\ x=(2k+1)\pi-\frac{13\pi}{120}\end{cases} \quad k\in Z\right\}$$

دویم مثال: د $\cos 2x+\sin x=0$ معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ دی، نو لیکلی شو چې:

$$1-2\sin^2 x+\sin x=0$$
$$2\sin^2 x-\sin x-1=0$$

که چېرې په پورتنۍ معادلې کې د $\sin x$ په ځای y وضع کړو، نو لیکو:

$$2y^2-y-1=0 \quad\Rightarrow\quad (2y+1)(y-1)=0$$
$$2y+1=0 \quad\Rightarrow\quad 2y=-1 \quad\Rightarrow\quad y_1=-\frac{1}{2}$$
$$y-1=0 \quad\Rightarrow\quad y_2=1$$

د $\sin x=y$ د تعویض لپاره چې مو په پام کې نیولی دی، نو د لاسته راغلو قیمتونو لپاره لرو چې:

$$\sin x=y_1=-\frac{1}{2}$$
$$\sin x=y_2=1$$

په دې ډول د $\sin x=-\frac{1}{2}$ لپاره هغه کوچنۍ زاویه چې ساین یې $-\frac{1}{2}$ وي له $\frac{7\pi}{3}$ څخه عبارت ده.

بنا پر دې د حلونو سټ يې عبارت دی له:

$$A=\left\{\begin{array}{l}\sin x=1 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x=-\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow x=\dfrac{7\pi}{6}\end{array}\right\}$$

$$A_1=\left\{\frac{\pi}{2}\;,\;2\pi+\frac{\pi}{2}\;,\;4\pi+\frac{\pi}{2},\;\ldots\right\}$$

$$A_2=\left\{2\pi+\frac{7\pi}{6}\;,\;4\pi+\frac{7\pi}{6},\;6\pi+\frac{7\pi}{6},\;\ldots\right\}$$

يا په عمومي ډول:

$$A=\left\{x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}\quad,\quad x=2n\pi+\frac{7\pi}{6}\;\;,\;\;n=0,1,2,3\;\ldots\right\}$$

دريم مثال: د $2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sin x(2\sin x-\sqrt{2})=0$$

$$\sin x=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0^\circ$$

$$2\sin x-\sqrt{2}=0$$

$$2\sin x=\sqrt{2}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad x_2=\frac{\pi}{4}$$

د معادلې د حلونو سټ عبارت دی له:

$$A_1=\{0^\circ\;,\;\pi\;,2\pi,3\pi\;,4\pi,\;5\pi\;,\;\ldots\}$$

$$A_2=\left\{\frac{\pi}{4},\;\pi-\frac{\pi}{4},2\pi+\frac{\pi}{4},3\pi-\frac{\pi}{4},\ldots\right\}$$

پوښتنې

د لاندې معادلو د حل سټونه پیدا کړئ.

1- $\cos 2x + 1 = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

2- $3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0$

3- $\sin^2 x - (1-\sqrt{3})\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو يا سيستمونو حل

د الجبري معادلو سيستم مو حل کړ. آيا د مثلثاتي معادلو سيستم حلولای شئ؟

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

دغه معادلې په شپږو ګروپونو باندې وېشلی شو:

لومړی ګروپ: د دغه ګروپ معادلې په لاندې اتو سيستمونوکې راټولې شوې دي.

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

څرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس يا زاويه ده، x او y مجهول قوسونه يا زاويې دي.يو له دغو سيستمونو څخه حلوو:

$$\begin{cases}\text{sinx} + \text{siny} = a \;... \quad \text{I} \\ \text{x} + \text{y} = \alpha............ \quad \text{II}\end{cases}$$

د لومړۍ معادلې قيمت د ضرب د فورمولونو په کارولو سره ليکو، څکه چې د دوو ساينونو مجموعه ده.

$$\sin x + \sin y = a$$

په دې اساس:

$$\begin{cases}2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = a \ldots \quad I \\ x + y = \alpha \ldots . II\end{cases}$$

اوس له II معادلې څخه د $x+y$ قيمت يعنې α د I په معادله کې اېږدو:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \ldots \quad I$$

د I اړيکې دواړه خواوې په $2\sin\frac{\alpha}{2}$ باندې وېشو:

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

تبصره: د پورتنۍ معادلې ښۍ لوري له $(+1)$ څخه لوی او لـه (-1) څخه کوچنی نـه دی، څکه چې د قوس يا زاويې ساين دی. يا په بل عبارت مربع يې له يو څخه لوی نه دی.

$$-1 \le \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

پورتنی غیرې مساوات د $1 < \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} < 0$ ، په شکل لیکو بیا یې دواړه خواوې مربع کوو:

$$\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

دواړه خواوې په $4\sin^2\frac{\alpha}{2} \ne 0$ کې ضربوو:

$$a^2 \le 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$$

پورتنی اړیکه د سیستم د حل له شرط څخه عبارت ده.

لومړی مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a = 1$ او $\alpha = \frac{\pi}{2}$ دی، وینو چې راکړل شوی شرط د سیستم د حل لپاره

صدق کوي او که نه؟ $a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$

د a او α قیمتونه په پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$1 - 4\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}}{2} \le 0 \Rightarrow 1 - 4\sin^2\frac{\pi}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 4(\sin\frac{\pi}{4})^2 \le 0$$

$$1 - 4(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \le 0 \Rightarrow 1 - 4\frac{2}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 2 \le 0 \Rightarrow -1 \le 0$$

لیدل کیږي چې سیستم د حل وړ دی، نو د تحویل د فورمولونو په مرسته د لومړی معادلې کیڼ لوري شکل

ته تغییر ورکوو: $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$

ځرنګه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ له دې امله $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ کېږي؛نو:

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1\Rightarrow\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x-y}{2}=\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow x-y=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{2}.........\ I\\ x+y=\frac{\pi}{2}........\ II\end{cases}\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow 2x=\frac{2\pi}{2}\quad\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

د x قیمت په I معادله کې ایږدو نو د y قیمت په لاس راځي:

$$\frac{\pi}{2}-y=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$

$$y=0$$

دویم ګروپ: د دغه ګروپ اړوند سیستمونه په لاندې ډول دي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\cos y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\sin y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cos x\cdot\cos y=a\end{cases}$$

ځرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی له: $-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$

دویم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړې.

$$\begin{cases}x+y=\pi\\ \sin x\sin y=1\end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a=1$ ، $\alpha=\pi$ دی د دغو معادلو د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}=-\cos\ \frac{\pi}{2}=0$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

د سیستم د حل شرط ته په کتنو سره کولای شو ولیکو:

$$-\cos^2\frac{\pi}{2} \le a \le \sin^2\frac{\pi}{2}$$
$$0 \le a \le 1$$

د II معادلې کین لورى د تحویل د فورمول په کارولو سره لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

څرنگه چې $\sin x \sin y = 1$ دی، بنا پر دې $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2$

له بلې خوا $x + y = \pi$ دی نو: $\cos(x-y) - \cos\pi = 2$

همدارنگه پوهیږو چې $\cos\pi = -1$ دی.

نو:

$$\cos(x-y) - (-1) = 2 \Rightarrow \cos(x-y) + 1 = 2$$
$$\Rightarrow \cos(x-y) = 2 - 1 \Rightarrow \cos(x-y) = 1$$
$$\cos(x-y) = \cos 0^\circ$$
$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

د I له معادلې څخه د x قیمت پیداکوو:

$$x + y = \pi \Rightarrow x + x = \pi \Rightarrow 2x = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad ,y = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = y = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2}$$

دریم گروپ: دغه گروپ څلور لاندې سیستمونه تشکیلوي، چې عبارت دي له:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

دریم مثال: لاندې مثلثاتي سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} \end{cases}$$

حل: **لیدل کیږي چې دغه سیستم له دریم گروپ سره مطابقت لري نو، په لاندې ډول کړنه کوو یعنې د سیستم دویمه معادله د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره داسې لیکو:**

$$\frac{\text{sinx} - \text{siny}}{\text{sinx} + \text{siny}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

د $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ او $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ قیمتونه په پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

څرنگه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ دی، نو $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ سره کېږي.

$$\cot\frac{\pi}{4}\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

له بلې خوا $\cot\frac{\pi}{4}=1$ دی نو معادله لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan\frac{x-y}{2} = \tan 15^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{2} = 15^\circ$$

$$x-y = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

د معادلو سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2} \\ x-y=\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

اوس د x قيمت په پورتنی یوه معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{\pi}{3}-y=\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=y\Rightarrow\frac{2\pi-\pi}{6}=y$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

څلورم گروپ: دغه گروپ اته لاندې سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cot x\pm\cot y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \tan x\pm\tan y=a\end{cases}$$

څرنگه چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $a^2-4+4a\cot\alpha\geq 0$

څلورم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{3}\\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}\end{cases}$$

حل: کولی شو لومړی معادله داسې ولیکو: $\tan(x-y)=\tan\frac{\pi}{3}$

له بلې خوا پوهیږو چې $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$

د $\tan x-\tan y=-2\sqrt{3}$ قیمت په پاسنی معادله کې ایږدو: $\dfrac{-2\sqrt{3}}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$

د مساوات دواړه خواوې په $\sqrt{3}$ باندې وېشو او لیکو.

یا:

$$\frac{-2}{1+\tan x\cdot\tan y}=1\quad\Rightarrow\quad 1+\tan x\cdot\tan y=-2$$

یا: $\Rightarrow\tan x\cdot\tan y=-3$

نو:

$$\begin{cases}\tan x \cdot \tan y = -3 \text{.............. I} \\ \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \text{....... II}\end{cases}$$

د $\tan x$ قیمت له II معادلې څخه په لاس راوړو په I کې يې ايږدو:

$$\tan x = -2\sqrt{3} + \tan y$$

$$(-2\sqrt{3} + \tan y)\tan y = -3$$

$$\tan^2 y - 2\sqrt{3}\tan y + 3 = 0$$

$$(\tan y - \sqrt{3})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y - \sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y = \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\pi}{3}$$

د y د قیمت په پام کې نیولو سره د I له معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړو.

$$\tan x \cdot \tan y = -3$$

$$\tan x \cdot \sqrt{3} = -3 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{2}$$

پنځم گروپ: دغه گروپ لاندې دوه سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases}x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a\end{cases}$$

د تير په څير بیاهم α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y معلوم قوسونه یا زاویې دي.

دپورتني سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $-1 \leq \frac{1+a}{1-a}\cos\alpha \leq 1$

پنځم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x + y = 7\frac{\pi}{6} \\ \tan x \cdot \tan y = 0\end{cases}$$

ليدل کېږي چې دغه سیستم په پنځم گروپ پورې اړه لري او په لاندې ډول يې حلوو:

$$\tan x \tan y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

د $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]$ او $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right]$

قیمتونه په اړونده اړیکه کې ایږدو.

$$\tan x \tan y = \frac{\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]}{\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right]}$$

د $x+y$ قیمت د سیستم له لومړی معادلې څخه په پورتنی اړیکه کې ایږدو:

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x-y)-\cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y)+\cos 7\frac{\pi}{6}}$$

څرنګه چې $\tan x \cdot \tan y = 0$ سره راکړل شوی دی، نو لیکو:

$$\frac{\cos(x-y)-\cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y)+\cos 7\frac{\pi}{6}} = 0$$

ددې لپاره چې کسر مساوي په صفر شي، نو باید صورت یې له صفر سره برابر شي؛ یعنې:

$$\cos(x-y)-\cos 7\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\cos 7\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y)+\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos(x-y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x-y = \frac{5\pi}{6}$$

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x-y = 5\frac{\pi}{6} \\ x+y = 7\frac{\pi}{6} \end{cases} -$$

$$2x = \frac{5\pi}{6}+\frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi \quad , \qquad x = \pi$$

د x قیمت د I په معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=5\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \pi-y=5\frac{\pi}{6} \quad , \quad -y=\frac{5\pi}{6}-\pi$$

$$y=\pi-\frac{5\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{6\pi-5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

شپږم ګروپ: په دغه ګروپ کې لاندې سیستمونه شتون لري:

$$\begin{cases} x \pm y=\alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=a \end{cases}$$

د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-1 \leq \frac{a-1}{a+1}\sin\alpha \leq 1$$

شپږم مثال:

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=-3 \end{cases}$$

د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره لرو:

$$\frac{\tan x-\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{-3-1}{-3+1}=2$$

د مساوات په کېڼې خوا کې د صورت او مخرج قیمتونه د $\sin$ او $\cos$ له جنسه داسې اېږدو:

$$\frac{\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}}=2 \Rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=2$$

$$2\sin(x+y)=\sin(x-y)$$

څرنګه چې $x-y=\dfrac{\pi}{2}$ دی، نو:

$$2\sin(x+y)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\sin(x+y)=\frac{1}{2} \Rightarrow x+y=\frac{\pi}{6}$$

هغه کوچنی قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $\frac{\pi}{6}$ چې د معادلو لاندې سیستم جوړوو:

$$x+y=\frac{\pi}{6}$$

$$x-y=\frac{\pi}{2}$$

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6} \ldots\ldots I \\ x-y=\frac{\pi}{2} \ldots\ldots II \end{cases}$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x=\frac{\pi+3\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}$$

$$x=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

د x قیمت د I په معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3}+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$$

$$y=\frac{\pi-2\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$$

$$y=-\frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه حل او ووایاست چې په کوم ګروپ پورې اړه لري؟

$a) \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \tan x+\tan y=1 \end{cases}$

$b) \begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x}=2 \end{cases}$

د څپرکي مهم ټکي

د ساین قانون: د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې شته:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

پورتنی اړیکه د ساین د قانون په نوم یادېږي.

د کوساین قانون: د ABC په هر مثلث کې چې دضلعو اوږدوالی یې b,a او c وي، د ضلعو او زاویو تر منځ لاندې اړیکې شته:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

د tan قانون: د ABC په هر مثلث کې د هغه د ضلعو او زاویو ترمنځ د tan له جنسه لاندې اړیکې شته:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}\quad,\quad\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}\quad,\quad\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

مثلثاتي مطابقت: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې د ټولو قیمتونو لپاره د مساواتو دواړه خواوې مساوي شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي.

مثلثاتي معادلې: هغه مساوات چې د زاویې په ځینو قیمتونو سره دواړه خواوې مساوي شي، معادله بلل کېږي.

د مثلثاتي معادلو سیستمونه

مثلثاتي معادلو سیستمونه په لاندې شپږو ګروپونو وېشل شوي دي:

لومړی ګروپ:

$$\begin{cases}\sin x\pm\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}\qquad\begin{cases}\cos x\pm\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

دویم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

دریم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

څلورم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

پنځم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x + \tan y = a \end{cases}$$

شپږم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

د څپرکي پوښتني

لاندي پوښتني په ځير سره ولولۍ، هرې پوښتني ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړۍ.

1. که چېرې $A = 20^\circ$, $b = 10$, $c = 7$ وي، د a د ضلعې اوږدوالی يې عبارت دی له:

$a)$ 16.4 $b)$ 16 $c)$ 15.9 $d)$ 16.8

2. که چېرې $a = 8$, $b = 5$ او $c = 10$ وي، د B زاويې اندازه عبارت ده له:

$a)$ 28° $b)$ 29° $c)$ 29.4° $d)$ 28.5°

3. که چېرې $A = 48^\circ$, $B = 22^\circ$ او $a = 5$ وي د b اوږدوالی عبارت دی له:

$a)$ 8 $b)$ 8.5 $c)$ 9 $d)$ -9.5

4. د $\sec x(\sec x - \cos x)$ مثلثاتي مطابقت مساوي دی له :

$a)$ $\tan x$ $b)$ $\dfrac{1}{\tan x}$ $c)$ $\cot x$ $d)$ $\tan^2 x$

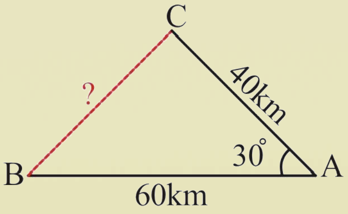
لاندي پوښتني حل کړۍ.

1. که چېرې د $A = 30^\circ$, $c = 8$, $b = 5$ واحده وي، د a ضلع او $\sin C$ پيداکړۍ.

2. که په يوه مثلث کې $a = 8$, $b = 5$, $c = 10$ واحده وي، د B زاويې اندازه پيداکړۍ.

3. د ABC په مثلث کې که $\dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ او $A = 30^\circ$ وي، د B او C زاويو اندازه پيداکړۍ.

4. دوې بېړۍ د A له ټکي څخه په دوو خواوو داسې په حرکت پيل کوي چې د منځ زاويه يې 30° ده، که له يوه ساعت څخه وروسته، لومړی بېړۍ $40\,km$ او دويمه بېړۍ $60\,km$ واټن وهلی وي، د دوو بېړيو ترمنځ واټن پيداکړۍ.



5. د $\cot^2 \beta$ او $\sin \beta$ له جنسه $\cos \beta$ محاسبه کړۍ.

6. لاندې مطابقتونه ساده کړئ.

$a)\ \dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$

$b)\ \dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$

$c)\ \tan A+\cot A=2\csc 2A$

$d)\ \dfrac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\dfrac{A}{2}\cdot\cot\dfrac{B}{2}$

$e)\ \dfrac{\cos A}{1-\sin A}=\tan(45+\dfrac{A}{2})$

$f)\ \cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$

7. لاندې مثلثاتي معادلې حل کړئ.

$a)\ \cos^2 x+\cos^4 x=0$

$b)\ \tan^2 x-4\tan x+3=0$

$c)\ 4\cos\beta-2=0$

$d)\ \cos x-\sqrt{3}\sin x=1$

$e)\ \cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x=-1$

8. آیا د $2\sin^2 x-\cos x=2\cos 2x+\sin x$ مساوات یو مطابقت دی او که معادله؟

9. لاندې افادې ساده کړئ.

$a)\ \dfrac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$

$b)\ 1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=?$

$c)\ \cos 4x+2\sin^2 2x$

$d)\ (\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x)^2$

10. د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه لومړی تشخیص او بیا یې حل کړئ.

$a)\ \begin{cases}\tan x+\tan y=1\\ \cos x\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

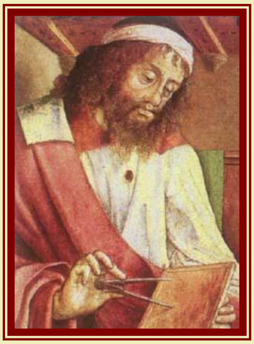
$b)\ \begin{cases}\sin(x+y)=\cos(x-y)\\ \tan x-\tan y=1\end{cases}$

درېم څپرکی

فضايي هندسه

د اقلیـدس تـصویر چـې نومـوړی د دوه بُعـدی او درې بُعدی هندسي بنسټ ایښودونکی دی.

اساسي مفاهیم او اکسیومونه



د اقلیدس د هندسي مفاهیمو څېړنې په دوو بعدونو کې د مسطحې هندسې په نامه یادېږي.

هغه هندسي مفاهیم، چې په دریو اړخونو(بعدونو) کې څېړل کېږي، فضایي هندسه نومېږي.

فعالیت

- د مفاهیمو په برخه کې لکه: لومړني اصطلاحات، دلیل، برهان او قضیو په هکله فکر وکړئ. خپل منځ کې خبرې او د موضوع په هکله بحث وکړئ.

له پورتني بیان او بحث څخه وروسته کولای شو، لاندې تعریف وکړو:

لومړنی اصطلاحګانې Postulates: د هر علم په برخه کې د لومړنیو اصطلاحګانو څخه سترګې پټولای نشو د نورو علومو په ډول په هندسه کې هم هغه مفاهیم او مفکورې چې پرته له کوم تعریف څخه منل کېږي لومړني اصطلاحات بلل کېږي. لکه: ټکی(نقطه)، کرښه، مستوي او فضا.

منطقي دلیل او برهان Logical Reason:برهان د ذهن هغه عمل ته ویل کېږي چې له یو لړ مخکینیو سمو وړاندیزونو او څېړنو څخه و روستنیو څېړنو ته رسېږي چې د هغې سموالی مخکې منل شوی وي. موږ هم کولای شو، هغه و منو.

قضیهTheorem: هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت یو لړ منطقي دلایلو ته اړتیا ولري، قضیه بلل کېږي.

ټکی(نقطه): موږ نقطه د یو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنی اصطلاح(تعریف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقیم خط:کش شوی تار، دمېزڅنډه او د خط کش تېغه د مستقیم خط مفهوم او مطلب بیانوي. د مستقیم خط بېلېدونکي علامې دا دي چې د دوو راکړل شوو ټکو څخه یوازې او یوازې یوه مستقیمه کرښه تیرېدلای شي مستقیم خط د لومړنی اصطلاح (تعریف شوی نه دی) په ډول منو.

باید فکر مو وي چې یو مستقیم خط دواړو خواوو ته تر لایتناهي پورې غزېدلای شي.

لومړی اصل: دوې ښکاره او ټاکلې نقطې یوازې او یوازې یو مستقیم خط څرګندوي.

دویم اصل: هر مستقیم خط لږ ترلږه دوې څرګندې نقطې لري چې په یو مستقیم خط باندې واقع دي، لږ تر لږه داسې درې نقطې شتون لري چې په یوه مستقیم خط باندې واقع نه وي.

دریم اصل: کولای شو په یوه مستقیم خط باندې د هرو دوو نقطو تر منځ یوه دریمه نقطه په لاس راوړو.

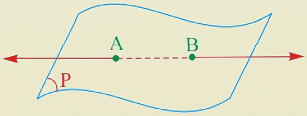
مستوي: د ولاړو اوبو سطح او د ټولګي تخته د مستوي مفهوم څرګندوي او مستوي د لومړنی اصطلاح (تعریف شوې نه ده) په توګه منل کېږي.

لومړی اصل: په هره مستوي کې لږ تر لږه درې نقطې شتون لري چې د یوه مستقیم خط په استقامت واقع نه وي.

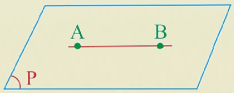
دویم اصل: له هرو دریو نقطو څخه چې د یوه مستقیم خط په استقامت پرتې نه وي، یوه مستوي تېرېږي.

دريم اصل: که چېرې د يوه مستقيم خط دوې نقطې په يوې مستوي کې وي، دا خط په مستوي کې دی.

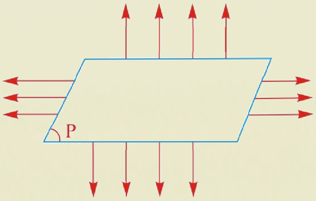
په مسطحه هندسه کې د مستوي رسمېدلوته اړتيا نشته، ځکه چې ټول شکلونه لکه: د کاغذ مخ، د لرگي تخته، چې هر يو يې يوه مستوي ځرگندوي رسمېږي، خو په فضايي هندسه کې د مستوي رسمولو ته اړتيا شته، ځکه چې په فضايي هندسه کې مستوي يوه نه، بلکې ډېرې دي. زياتره په فضايي هندسه کې مستوي د متوازي الاضلاع، مستطيل او يا هوارې سطحې په واسطه ښودل کېږي او په يوه کونج کې يې يو توری ليکي.



مستوي نه ده



محدوده مستوي



نا محدوده مستوي

دا مستوي گانې چې په پورته شکلونو کې ليدل کېږي، په همدې پراخوالي نه دي، بلکې ترلايتناهي پورې امتداد لري. دا چې مستوي گانې په پورته شکلونو کې ليدل کېږي هغه متوازي الاضلاع او مستطيل نه دي، بلکې د مستوي په يوې هوارې سطحې کې ښودل دي.

ټولې نښې چې په مسطحه هندسه او رياضي کې استعمالېږي، په فضايي هندسه کې هم استعمالېږي.

هغه اکسيومونه چې په مسطحې هندسې کې موجود دي، په فضايي هندسه کې هم له دې اکسيومونو څخه کار اخيستل کېږي.

سربېره په مسطحه هندسه په فضايي هندسه کې هم يو لړ ځانگړي اکسيومونه شته چې په لاندې ډول بيانيږي.

د مستوي لومړنی اکسيوم: هغه مستقيم خط چې د مستوي دوې مختلفې نقطې سره نښلوي په دې مستوي کې شامل دی.

د مستوي دويم اکسيوم: له هغو دريو نقطو څخه چې په يوه مستقيم خط واقع نه دي، يوازې او يوازې يوه مستوي تېرېږي.

د متقاطع مستوي گانو اکسيوم: که چيرې دوې مستوي گانې يو گډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چيرې يو گډ مستقيم خط ولري، د غه متقاطع خط ته د دوو مستوي گانو مشترک فصل وايي.

فضا: فضا هم د لومړنی اصطلاح (تعريف شوې نه ده) په توگه پېژنو.

لومړی اصل: دلايتناهي نقطو مجموعې ته فضا وايي.

دويم اصل: لږترلږه څلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.

پوښتنې

1. ځرگنده کړئ چې ولې درې پښې لرونکی مېز د څلورو پښو لرونکي مېز په پرتله ټينگ دی؟
2. ولې نقطه، کرښه او مستوي لومړنی اصطلاح گانې بولي؟
3. له دوو نقطو څخه څو مستوي گانې تېرېدلای شي چې دواړه نقطې په کې پرتې وي.

په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي

په فضا کې دوه قلمونه، دوه کتابونه، یو کتاب او یو قلم کوم حالتونه لرې؟

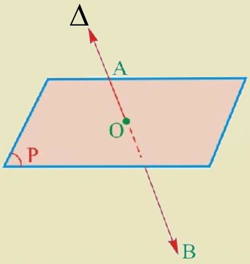
در ې بُعدي فضا:

هغه فضا، چې موږ په کې ژوند کوو، درې بُعدي فضا ده. دا درې بُعدي فضا یوه له نه تعریف شوو لومړنیو مفهومونو څخه ده.

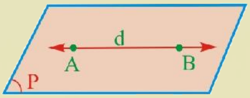
فضا دلایتناهي نقطو مجموعه ده، خط او مستوي هم په ترتیب سره یو او دوه بعدونه لري چې هر یو د فضا د سټ یوه برخه(جزء) دی.

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت: یوه مستقیمه کرښه او یوه مستوي لاندې درې حالتونه لري:

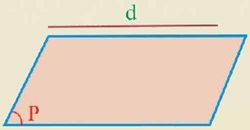
1. که چیرې یو مستقیم خط او یوه مستوي یوه مشترکه نقطه ولري، دا خط او مستوي یو له بل سره متقاطع دي. دمثال په ډول په دې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي د O په نقطه کې قطع کړې ده.



2. که چیرې یو مستقیم خط له یوې مستوي سره دوه او یا له دوو څخه زیاتې مشترکې نقطې ولري دا مستقیمه کرښه په مستوي منطبقه ده او یا داسې ویل کیږي چې مستقیمه کرښه په مستوي کې شامله ده، د مثال په ډول د d مستقیم د P په مستوي کې شامل دی.



3. که چېرې یوه مستقیمه کرښه له یوې مستوي سره هیڅ ګډه نقطه و نه لري، دا مستقیم له مستوي سره موازي دی، مثلاً په لاندې شکل کې د d مستقیم خط له P مستوي سره موازي دی.

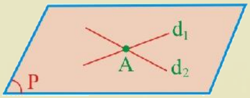


له یو بل سره د دوو مستقیمو کرښو نسبي حالت:

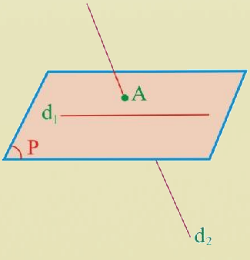
1- که چېرې دوه مستقیم خطونه په یوه مستوي کې شامل وي، نوموړي خطونه د همغې مستوي خطونه بلل کېږي، او یو له لاندینیو حالتونو څخه لري.

په یوې مستوي کې دوه خطونه هغه وخت موازي بلل کېږي چې هېڅ ګډټکی ونه لري.

2- په یوه مستوي کې دوه خطونه چې یوه ګډه نقط ولري، متقاطع خطونه بلل کېږي.

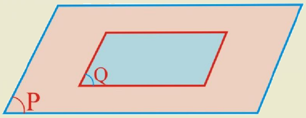


3- دوه مستقیم خطونه چې په یوه مستوي کې پراته نه وي او کومه مشترکه نقطه هم و نه لري، متنافر خطونه بلل کېږي؟

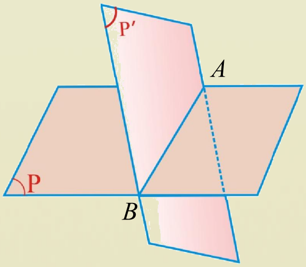


د دوو مستوي‌ګانو نسبي حالت:

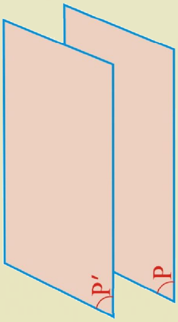
په عمومي ډول دوې مستوي‌ګانې لاندې درې حالتونه لري.



منطبق: که چېرې دوې مستوي‌ګانې لږ تر لږه درې مشترکې نقطې ولري چې د یو مستقیم خط په امتداد پرتې وي، یو پر بل منطبقې مستوي‌ګانې بلل کېږي، لکه: په مخامخ شکل کې د P او Q دوې مستوي‌ګانې یو پر بل منطبقې دي.



متقاطع: که چېرې دوې مستوي‌ګانې یو ګډ مستقیم خط ولري متقاطع مستوي‌ګانې بلل کیږي. دغه د AB مشترک خط ته مشترک فصل هم وایي. لکه: مخامخ شکل.



موازي: که چېرې دوه مستوي‌ګانې هیڅ کوم ګډ ټکی و نه لري، سره موازي دي، د مثال په توګه د P او P' مستوي‌ګانې.

فعالیت

- په فضاکې له یوې نقطې څخه څو مستقیم خطونه تېرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستقیم خطونه تېرېږي؟
- له یوې نقطې څخه څو مستوي ګانې تېرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تېرېږي؟
- له دریو نقطو څخه څو مستوي ګانې تېرېږي چې درې واړې نقطې پکې شاملې وي؟

پوښتنې

1- د R او T نقطې د P په مستوي کې پرتې دي، د کوم دليل له مخې د $\overline{RT}$ خط د P په مستوي کې پروت دی؟

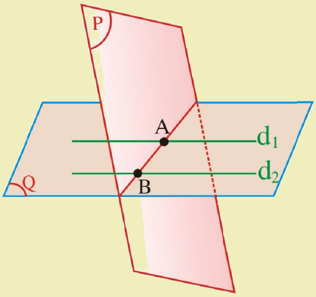
2- که د Δ مستقيم خط د P په مستوي کې پروت نه وي، د Δ مسقيم خط به د P مستوي په څو نقطو کې قطع کړي؟

3- که چېرې د AB مستقيم خط او د P مستوي د M او K دوې ګډې نقطې ولري، د $\overline{AB}$ مستقيم خط د P په مستوي کې پروت دی؟

4- د B, A او C نقطې د P په مستوي کې واقع دي او هم د B, A او C نقطې د p' په مستوي کې پرتې دي، د P او p' مستوي ګانې يوه له بلې سره څه اړيکې لري؟

په فضا کې موازي مستقيم خطونه

آيا په فضا کې مستقيم خطونه موازي دي؟



تعريف:

دوه مستقيم خطونه چې په يوې مستوي کې پراته او ګډه نقطه و نه لري، موازي خطونه بلل کېږي.

د موازاتو اکسيوم:له يوې خارجي نقطې څخه له يوې مستقيمې کرښې سره يوازې او يوازې يوه موازي مستقيمه کرښه رسمولای شو او بس.

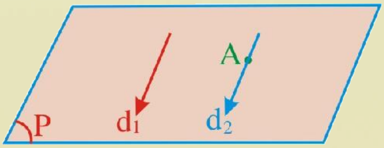
فعاليت

- د A ټکی د P مستوي او د d_1 مستقيم خط چې د A ټکی ورباندې پروت نه وي، په پام کې ونيسئ؟
- د A ټکي او د d_1 له مستقيم خط څخه څو مستوي‌ګانې تېرېدلای شي؟ ولې؟

له پورتني فعاليت څخه د قضيې متن او ثبوت بيانوو.

قضيه: د يوې خارجي نقطې څخه له يوه مستقيم خط سره يوازې يو موازي مسقيم خط رسمولای شو او بس.

ثبوت: د A له نقطې او د d_1 له مستقيمې کرښې څخه يوازې يوه د P مستوي تېرېږي، ولې؟



اوس د P په مستوي کې د A له نقطې څخه يوازې د d_2 مستقيم خط د d_1 له مستقيم خط سره موازي رسمولای شو.

(پورتنی ثبوت په مسطحه هندسه کې لوستل شوی). نو پورتنی دعوا چې ټکی او خط په فضا کې وي، هم سموالی لري.

فعالیت

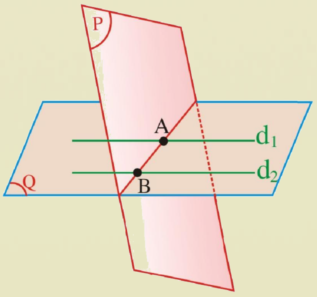
دوه د d_1 او d_2 موازي خطونه او يوه د A نقطه د P له مستوي څخه د باندې په پام کې ونيسئ.

- آيا د d_1 او d_2 مستقيم خطونه يوه بله مستوي ټاکلی شي؟
- که چېرې د P مستوي د Q مستوي د A په ټکي کې قطع کړي، آيا د P مستوي به د d_2 مستقيم خط هم قطع کړي؟
- آيا دوې مستوي‌گانې يوه بله د يوه مستقيم خط په اوږدو کې قطع کوي، ولې؟

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه وروسته د قضيې متن او ثبوت بيانوو.

قضيه: که دوه مستقيم خطونه موازي وي او مستوي يو له هغو څخه قطع کړي، بل يې هم قطع کوي.

ثبوت: د d_1 او d_2 يو له بل سره موازي مستقيمونه د Q په مستوي کې پراته دي.



که د P مستوي د d_1 مستقيم د A په نقطه کې قطع کړي، نوموړې مستوي د d_2 مستقيم هم د B په نقطه کې قطع کوي د تعريف له مخې د d_1 او d_2 موازي خطونه يوه د Q مستوي ټاکي، د P او Q مستوي-گانې د A يوه مشترکه نقطه لري، که چېرې دوې مستوي‌گانې يوه له بل په يوه نقطه کې قطع کړي، نو ويلای شو چې هغوی يو بل د يوې مستقيمې کرښې په اوږدو کې قطع کوي، له دې امله د P او Q مستوي‌گانې د d_2 مستقيمه کرښه د B په نقطې کې هم قطع کوي.

ځکه يو مستقيم خط چې په يوې مستوي کې له دوو موازي خطونو څخه يو قطع کړي، بل يې هم قطع کوي.

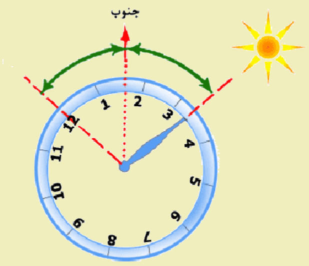
پوښتنې

1- که چېرې دوه مستقيم خطونه له يوه دريم مستقيم خط سره موازي وي ثبوت کړئ چې دا مستقيم خطونه په خپل منځ کې هم موازي دي؟

2- که چيرې د E او F مستوي‌گانې سره موازي او د L_1 مستقيم خط د E مستوي کې او د L_2 مستقيم خط د F په مستوي کې واقع وي آيا $L_1 // L_2$ دی؟

3- که د E او F مستوي گانې سره متقاطع او د P مستوي هغوی دواړه قطع کړي، آيا د E او F گډ فصل د E او P له مشترك فصل او د F او P له مشترك فصل سره موازي دی؟

په فضا کې د دوو مستقيمو کرښو تر منځ زاويه



که چېرې د يوې زاويې دوراني لورى د ساعت د عقربې په مخالف لورې حرکت وکړي، زاويه مثبت او که د ساعت د عقربې په همجهت(عين لوري) وي زاويه منفي ده.

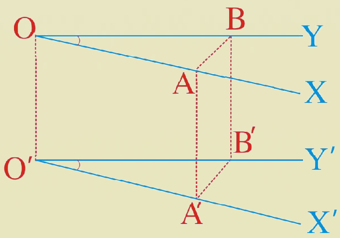
فعاليت

- د XOY او $X'O'Y'$ زاويې داسې په پام کې ونيسئ چې ضلعې يې سره موازي او هم جهته وي.
- د $\overline{OX}$ او $\overline{O'X'}$ له ضلعو څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{O'A'}$ دوه مساوي قطعه خطونه او د $\overline{OY}$ او $\overline{O'Y'}$ له ضلعو څخه د $\overline{OB}$ او $\overline{O'B'}$ مساوي قطعه خطونه بېل کړئ.
- د $OAA'O'$ شکل، کوم هندسي شکل لري، دليل يې وواياست، د OAB او $O'A'B'$ جوړ شوي مثلثونه له يو بل سره څه اړيکه لري؟

د پورتني فعاليت له مخې د قضيې متن او ثبوت په لاندې ډول بيانولی شو.

قضيه: په فضا کې دوې زاويې چې دوه په دوه موازي او هم جهته ضلعې ولري، يوه له بلې سره مساوي دي.

ثبوت: د XOY او $X'O'Y'$ زاويې په پام کې نيسو، داسې چې $\overline{O'X'}//\overline{OX}$ او $\overline{O'Y'}//\overline{OY}$ دي، يو لوری هم لري. په شکل کې د OX او $O'X'$ پر خطونو د $\overline{OA}$ او $\overline{A'O'}$ قطعه خطونه سره مساوي موازي او هم جهته دي.



نو د $OAA'O'$ شکل يوه متوازي‌الاضلاع ده. له دې امله د $\overline{BB'}$ او $\overline{OO'}$ قطعه خطونه موازي، مساوي او هم لوري دي. نو $ABB'A'$ هم يوه متوازي‌الاضلاع ده او $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ دی.

د $O'A'B'$ او OAB مثلثونه انطباق منونکي دي. ځکه $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, $\overline{A'O'} = \overline{OA}$ او $\overline{O'B'} = \overline{OB}$ دي

له دې امله $A\hat{O}B = A'\hat{O'}B'$ دي.

د قضیې پایله:

i) که په ترتیب سره د دوو زاویو ضلعې موازي او هم لوري وي، نوموړې زاویې یو له بل سره مساوي دي.

ii) که د دوو زاویو یوه، یوه ضلع موازي او هم جهته وي او د هغو یوه، یوه ضلع یې موازي او مختلف جهتونه ولري، د دغو دواړو زاویو پراخوالی 180° دی.(ثبوت یې د زده‌کوونکو دنده ده).

د دوو متنافر و مستقیمو کرښو ترمنځ زاویه:

تعریف: په فضاکې د دوو متنافر و مستقیمونو ترمنځ زاویه له هغې زاویې څخه عبارت ده چې د یوې مستوي په یوه اختیاري نقطه کې له هغو سره د دوو موازي مستقیمونو د رسمولو په واسطه حاصلیږي

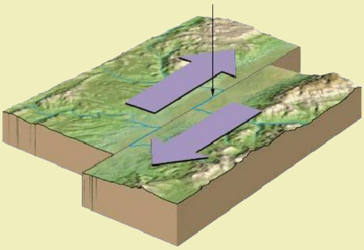
پوښتنې

1- که د دوو زاویو پراخوالی سره مساوي وي او د یوې زاویې یوه ضلع د بلې زاویې ضلعې سره موازي وي، آیا د هغو زاویو نورې ضلعې یو له بل سره موازي دي. ولې؟

2- که د دوو زاویو ضلعې سره موازي وي، ثابت یې کړئ چې د دغو زاویو، ناصف‌الزاویې سره موازي او یا سره عمود دي.

3- د d_1, d_2 دوو متنافرو مستقیمونو ترمنځ زاویه پیدا کړئ.

په فضا کې موازي مستقیمونه او موازي مستوي گانې



یوه مستقیمه کرښه هغه وخت له یوې مستوي سره موازي بلل کېږي چې هیڅ ګډ ټکی و نه لري.

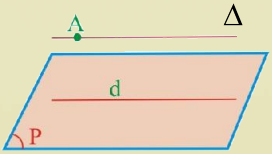
مستوي ګانې په فضا کې هغه وخت سره موازي دي چې هیڅ ګډ ټکی و نه لري.

فعالیت

که چېرې د d مستقیم د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقیمه کرښه د P د مستوي بهر او د d مسقیم سره موازي وي، آیا د Δ مستقیم د P له مستوي سره موازي کېدلای شي؟

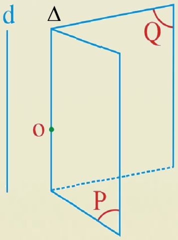
- دوې د P او Q متقاطع مستوي‌ګانې او یو مستقیم خط له دغو مستوي ګانو څخه بهر د P او Q له مستوي‌ګانو سره موازي په پام کې ونیسئ.
- د d مستقیم(مشترک فصل) د Δ له مستقیم خط سره موازي کېدای شي؟
- له یوې ټاکلي نقطې څخه د d_1 او d_2 دوو مستقیمو کرښو سره څو موازي مستوي‌ګانې چې موازي نه وي رسمولای شو؟ د فعالیتونو د هرې برخې له تر سره کولو وروسته د قضیو متن او ثبوت په ترتیب بیانوو.

قضیه: که یو مستقیم خط د یوې مستوي له یوه خط سره موازي وي. نوموړی مستقیم خط له همدې مستوي سره موازي دی.



ثبوت:د d مسقیم خط چې د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقیمه کرښه د p د مستوي بهر او د d له مستقیم سره موازي راکړل شوې، ثابتوو چې د Δ مستقیمه کرښه د p له مستوي سره موازي ده، که د p مستوي د Δ مستقیمه کرښه قطع کړي، د d مستقیمه کرښه چې د Δ له مستقیمې کرښې سره موازي ده هم قطع کوي. دا د فرضیې خلاف ده، ځکه د d مستقیمه کرښه د P په مستوي کې پرته ده، نو د p مستوي د Δ مستقیم قطع کولای نشي.

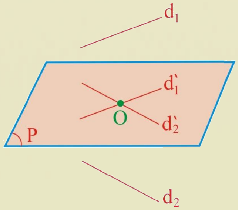
قضیه: که یوه مستقیمه کرښه له دوو متقاطع مستويګانو سره موازي وي، نوموړې مسقیمه کرښه د نوموړو مستويګانو له ګډ فصل سره موازي ده.



ثبوت: د P او Q دوې متقاطع مستوي ګانې په پام کې نیسو چې هره یوه یې د d له مستقیمې کرښې سره موازي ده، لکه: مخامخ شکل.

که د P ، Q د مستويګانو د Δ په مشترك فصل باندې د O نقطه وټاکو او له هغې نقطې څخه د d له مستقیمې کرښې سره یو موازي رسم کړو، دا موازي د Δ په مستقیمې کرښې منطبق کېږي ځکه Δ یوازینی خط دی چې په دواړو مستويګانو یعنې په P او Q کې شامل دی.

قضیه: د (O) له یوې ټاکلې نقطې څخه د d_1 او d_2 مستقیم خطونه چې یو له بل سره موازي نه دي یوازې یوه موازي مستوي رسمولای شو او بس.

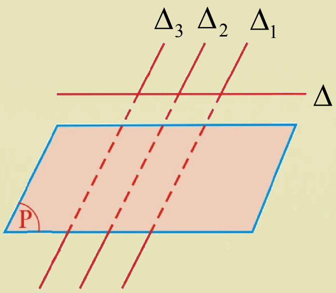


ثبوت: د (O) له نقطې څخه د d'_1 او d'_2 خطونه چې په پرتیب له d_1 او d_2 مسقیمونو سره موازي وي، رسموو د P مستوي چې د (O) له نقطې څخه تیرېږي او د d'_1 او d'_2 مستقیمې کرښې په خپل ځان کې لري له d_1 او d_2 سره موازي دي؟ ولې؟

که چېرې d_1 او d_2 یو له بل سره موازي وي، نو d'_1 او d'_2 یو پر بل منطبق کېږي.

پوښتنې

1- که چېرې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه سره موازي وي، څو موازي مستويګانې له هغو سره رسمولای شئ؟

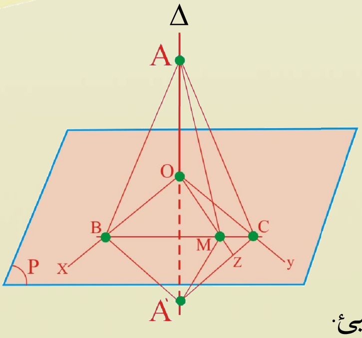


2- که چېرې د Δ_1 , Δ_2 او Δ_3 موازي خطونه د P مستوي او د Δ مستقیمې کرښې په واسطه په داسې حال کې چې د Δ مستقیمه کرښه د P له مستوي سره موازي ده قطع شي، ثبوت کړئ چې مخامخ قطع شوي قطعات یو له بل سره مساوي دي.

په فضا کې متعامدې مستقیمې کرښې او مستوي ګانې

که د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي په (O) ټکي کې عمود وي، آیا هغه ټول مستقیم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تیریږي، د Δ په مستقیمې کرښې باندې عمود دي؟

فعالیت



- مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د $\overline{ox}$ او $\overline{oy}$ مستقیمونه د Δ په مستقیم د (O) په نقطه کې عمود رسم کړئ.
- د P په مستوي کې د OZ اختیاري مستقیمه کرښه په پام کې ونسیئ.
- د Δ له مستقیمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ مساوي‌الفاصله قطعه خطونه جلا کړئ.

یو اختیاري قاطع داسې رسم کړئ چې د $\overline{OX}$ مستقیمه کرښه د B او $\overline{oy}$ مستقیمه کرښه د C او د $\overline{OZ}$ مستقیمه کرښه د M په نقطو کې قطع کړي. $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ له $\overline{AA`}$ سره څه اړیکه لري.

- د OZ مستقیمه کرښه د Δ پر مستقیمه کرښه عمود ده؟ ولې؟

د پورتني فعالیت له تر سره کولو وروسته د قضیې متن او ثبوت داسې بیانوو.

قضیه: که د Δ یوه مستقیمه کرښه پر هغو دوو مستقیمو کرښو چې دواړه د Δ مستقیمه کرښه د (O) په نقطه کې قطع کوي عمود وي، په هغو ټولو مستقیمو خطونو باندې چې په مستوي کې متقاطع دي او د (O) له نقطې څخه تیریږي، عمود ده.

ثبوت: دوې مستقيمې کرښې د $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ په پام کې نيسو، دا دوه مستقيمونه د Δ پر مستقيم چې د(O) له نقطې څخه تېرېږي، عمود دي او د P مستوي جوړوي، د P په مستوي کې د OZ اختياري مستقيمه کرښه په پام کې نيسو، د Δ له مستقيمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ دوه متساوي الفاصله قطعه خطونه جلاکوو.

او د P په مستوي کې يو قاطع رسموو چې د $\overline{OX}$ B او د $\overline{OY}$ C او oz مستقيم د M په نقطه کې قطع کړي.

$\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ دواړه د $\overline{AA'}$ منځنۍ عمودونه دي، نو

$$\overline{BA} = \overline{BA'}$$

$$\overline{CA} = \overline{CA'}$$

د ABC او $A'B'C'$ مثلثونه انطباق منونکی دي. د انطباق منلو د عمليې په وخت کې د C,B او M نقطې ثابتې پاتې کېږي او د A نقطه په A' او $\overline{MA}$ په $\overline{MA'}$ منطبق کېږي، نو ليکلی شو. $\overline{MA'} = \overline{MA}$

د $M\overset{\Delta}{A}A'$ مثلث متساوي الساقين دی او د $\overline{MO}$ منځنۍ په عين وخت کې د $\overline{AA'}$ منځنۍ عمود دی په نتيجه کې د Δ مستقيمه کرښه د $\overline{OZ}$ پر مستقيمې کرښې باندې عمود دی.

فعاليت

- که د B او C نقطې د P او Q له ټکو څخه متساوي الفاصله وي، د BC مستقيمې کرښې هره نقطه له P او Q څخه متساوي‌الفاصله ده. اوس د X يوه اختياري نقطه د BC پر مستقيمه کرښه وټاکئ او ثابت کړئ چې X د P او Q څخه متساوي الفاصله دی.

پوښتنې

1- که چېرې د d_1 او d_2 خطونه يو له بل سره موازي وي، له هغو سره څو موازي مستوي‌ګانې رسمولای شئ؟

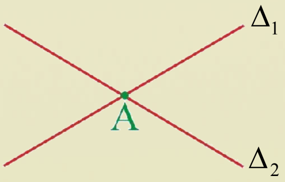
2- که د L خط د P پر مستوي عمود وي، آيا ټولې هغه مستوي ګانې چې د L خط په کې پروت دی د P په مستوي باندې عمود دي؟

په فضا کې موازي مستوي‌ګانې

دوې مستوي‌ګانې چې هيڅ مشترکه نقطه ونه لري،
موازي مستوي‌ګانې بلل کيږي.

فعاليت

- د Δ_1 او Δ_2 مستقيم خطونه، چې د A په نقطه کې متقاطع دي، په پام کې ونسيئ
- له دې دوو مستقيمو خطونو او د A له نقطې څخه يوه مستوي تېرولی شو.

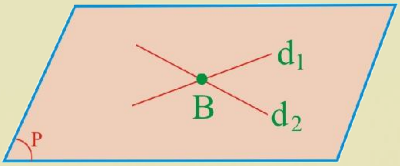


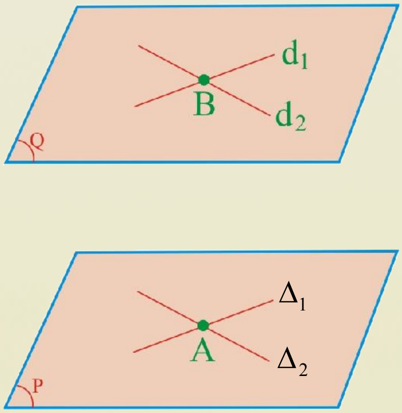
- له دې مستوي څخه بهر د d_1 او d_2 دوې مستقيمې کرښې چې په ترتيب سره د Δ_1 او Δ_2 سره موازي او يو بل د B په ټکي کې قطع کړي، رسم کړئ.
- هغه مستوي چې د Δ_1 او Δ_2 او د A له نقطې څخه جوړه شوې، له هغې مستوي سره چې د d_1 او d_2 مستقيمو کرښو او د B له ټکي څخه جوړه شوې ده، څه اړيکه لري؟

د پورتني فعاليت له تر سره کولو وروسته د قضيې متن او ثبوت بيانولی شو.

قضيه: که د يوې مستوي دوې متقاطع مستقيمې کرښې د بلې مستوي له متقاطع مستقيمو کرښو سره موازي وي، نوموړې مستوي‌ګانې سره موازي دي.

ثبوت: د Δ_1 او Δ_2 مستقيم خطونه د A په نقطه کې متقاطع دي او يوه د P مستوي جوړوي. د B له نقطې څخه(چې د P مستوي بهر ده) د d_1 او d_2 مستقيم خطونه له Δ_1 او Δ_2 سره موازي رسم شوي دي، چې d_1 او d_2 هم يوه د Q مستوي جوړوي، ثابتوو چې د P او Q مستوي‌ګانې سره موازي دي.





څرنگه چې d_1 او Δ_1 سره موازي دي، نو d_1 د P له مستوي سره هم موازي دي. همدارنگه d_2 له Δ_2 سره موازي دي نو d_2 هم د P له مستوي سره موازي دی. اوس که چېرې د P او Q مستوي گانې یو بل سره قطع کړي، مشترك فصل يې هم په همدې وخت کې له d_1 او d_2 سره موازي کېږي، ولې؟

دا امکان نه لري، ځکه چې د d_1 او d_2 مستقيم خطونه متقاطع دي، په نتیجه کې د P او Q مستوي گانې یوه بله سره قطع کولای نشي، نو یو بل سره موازي دي.

پوښتنې

که چېرې د E او F مستوي گانې سره موازي وي او د L_1 مستقيمه کرښه په E مستوي او د L_2 مستقيمه کرښه د F په مستوي کې پرتې وي، آیا $L_1 // L_2$ دی؟

د څپرکي مهم ټکي

1- دفضايي هندسې بنسټيز مفاهيم او اکسيومونه:

لومړنۍ اصطلاحګانې Postulates:

هغه مفاهيم او مفکورې، چې پرته له کوم تعريف څخه منل کېږي، لومړني اصطلاحات بلل کېږي د مثال په توګه. ټکی، کرښه، مستوي او فضا.

دليل او برهان Logical Reason:

برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې لـه يـو لـړ مخکينيو سمو وړانـديزونو او څېړونـو څخه و روسته وروستيو څېړنو ته رسېږي او د هغې سموالی مخکې منل شوی وي، موږ هم کولی شو، هغه و منو.

قضيه: Theorem

هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يولړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کېږي.

ټکی: موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقيم خط:کش شوی تار، د مېز څنډه او د خط کش تېغه د مـستقيم خط مفهـوم او مطلـب بيـانوي. مستقيم خط د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

د مستوي لومړی اکسيوم:هغه مستقيم خط چې د يوې مستوي دوې مختلفې نقطې سره ونښلوي، پـه همغه مستوي کې شامل دی.

د مستوي دويم اکسيوم:له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرتـې نـه وي، يـوه مستوي تېرېږي.

د متقاطع مستوي ګانو اکسيوم:که چېـرې دوه مـستوي ګـانې يـو ګـډ ټکـی ولـري، متقـاطع دي او پـه همدې ډول که چېرې يو مسقيم خط ولري، دغه متقاطع خط ته د دوو مستوي ګانو مشترک فصل وايي.

فضا: فضا هم (تعريف شوې نه ده) لومړنۍ اصطلاح په توګه پېژنو.

لومړی اصل: فضا د لايتناهي نقطو مجموعه ده.

دويم اصل: لږتر لږه د فضا څلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.

په درې بُعدي فضا کې خط او مستوي:

درې بعدي فضا: هغه فضا چې موږ په کې ژوند کوو درې بعدي فضا ده.

له يو بل سره په فضا کې د دوو مستقيمو خطونو نسبي حالت

موازي

منطبق

متقاطع

متنافر

د يوې مستقيمې کرښې او يوې مستوي نسبي حالت

متقاطع

منطبق

موازي

د دوو مستوي گانو نسبي حالت

منطبق

متقاطع

عمود

په فضا کې موازي مستقيمونه:

دوې مستقيمې کرښې چې په يوې مستوي کې واقع او مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستقيمونه بلل کيږي.

په فضا کې د دوو مستقيمونو تر منځ زاويه:په فضا کې دوې متوازي الاضلاع او هم جهته زاويې سره مساوي دي.

په فضا کې موازي مستقيمونه او مستوي: يو مستقيم خط له يوې مستوي سره هغه وخت موازي بلل کيږي، چې هيڅ مشترکه نقطه ونه لري.

په فضا کې متعامد مستقيمونه او مستوي گانې:

که د Δ مستقيم د (O) په نقطه کې د P پر مستوي عمود وي، ټول هغه مستقيم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تيريږي، د Δ پر مستقيمه کرښه باندې عمود دي؟

په فضا کې موازي مستوي گانې:دوې مستوي گانې، چې هيڅ گډ ټکی ونه لري، موازي مستوي گانې بلل کيږي.

د څپرکي پوښتني

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب یې پیدا او کرې ترې تاو کړئ.

1- د P مستوي د A او B نقطې مفروض دي. که د A او B د نقطو فاصله له p مستوي سره مساوي وي، د P مستوي په هر حال کې:

a _ د AB له خط سره موازي دی

b _ د AB خط یې له منځه تېرېږي

c _ د AB خط عمودي ناصف دی

d _ د AB له خط سره موازي دي یا له AB څخه تېرېږي

2- که د Δ خط د P د مستوي په ټولو خطونو عمود وي، نو:

a _ د Δ خط د مستوي پر ټولو خطونو عمود دی.

b _ د Δ خط یوازې د P مستوي پر دوو خطونو عمود دی.

c _ د Δ خط د P مستوي له بې شمېره خطونو سره موازي دی.

d _ د Δ خط یوازې د P مستوي له یوه خط سره موازي دی.

3- په دقیق ډول له لاندې کومو اجزاوو څخه یوه مستوي نه تېرېږي له:

a _ هغو درې نقطو څخه چې پر یو مسقیم واقع دی.

b _ له دوو متقاطع خطونو څخه

c _ د یو خط او د هغې له خارجي نقطې څخه

d _ څلور متمایزې مختلفې نقطې

4- له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې هر وخت سم نه وي.

a _ که د Δ مستقیم خط د P له مستوي سره موازي وي او له هغه خط څخه یوه مستوي تېره کړو، دا مستوي د P له مستوي سره موازي دی.

b _ که د Δ او Δ' دوه خطونه د d له خط سره موازي وي، هغه وخت Δ او Δ' یو له بل سره موازي دي.

c _ که د Δ او Δ' دوه خطونه موازي وي او د P مستوي د Δ خط قطع کړي، د Δ' خط هم قطع کولای شي.

d _ که دوې مختلفې مستوي‌گانې په یوه نقطه کې شریکې وي، نو نوموړې مستوي‌گانې د یاد شوي ټکي په امتداد کې شریکې دي.

5- د Δ خط د P مستوي قطع کوي، خو د P پر مستوي عمود نه دی. دا خط د P د مستوي په څو خطونو باندې عمود دی؟

a) 0　　b) 1　　c) 2　　d) بې شمېره

6- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه دي.

a _ که کوم خط د مستوي له خطونو سره موازي وي او متمايز وي، نوموړی خط د هغې لـه مـستوي سـره موازي دی.

b _ که يو خط يو له متقاطع مستوي ګانو څخه قطع کړي، بله هم قطع کوي.

c _ که يو خط يوه له دوو موازي مستوي ګانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

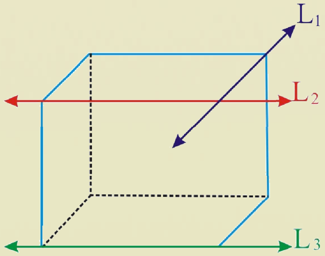
d _ که يوه مستوي يوه له دوو موازي مستوي‌ګانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

لاندې سوالونه حل کړئ:

1- که چېرې د E او F مستوي ګانې يوله بله سره موازي او د L_1 مستقيم خط د E په مستوي کې او د L_2 مستقيم خط د F په مستوي کې واقع وي آيا $L_1 // L_2$ دي؟

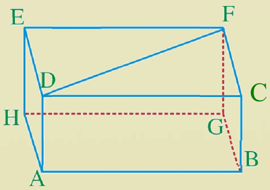
2- که دوه مستقيم خطونه له يوې مستوي سره موازي وي، نوموړي خطونه خپل منځ کې عمـود کيـدای شي.

3- پـه لانـدې مـستطيل کـې د L_1, L_2 او L_3 خطونـو موقعيت نظر يو بل ته څرګند کړئ. د دې خطونو کومې جوړې متقاطع، کومې جوړې يې مـوازي او کومې جوړې متنافرې دي؟



4- که د P_1 او P_2 مستوي‌ګانې د P پر مستوي باندې عمود وي، د P_1 او P_2 مستوي ګانې په خپل منځ کې موازي دي؟

5- په مخامخ شکل کې هر څلور ضلعي يو مستطيل دی.



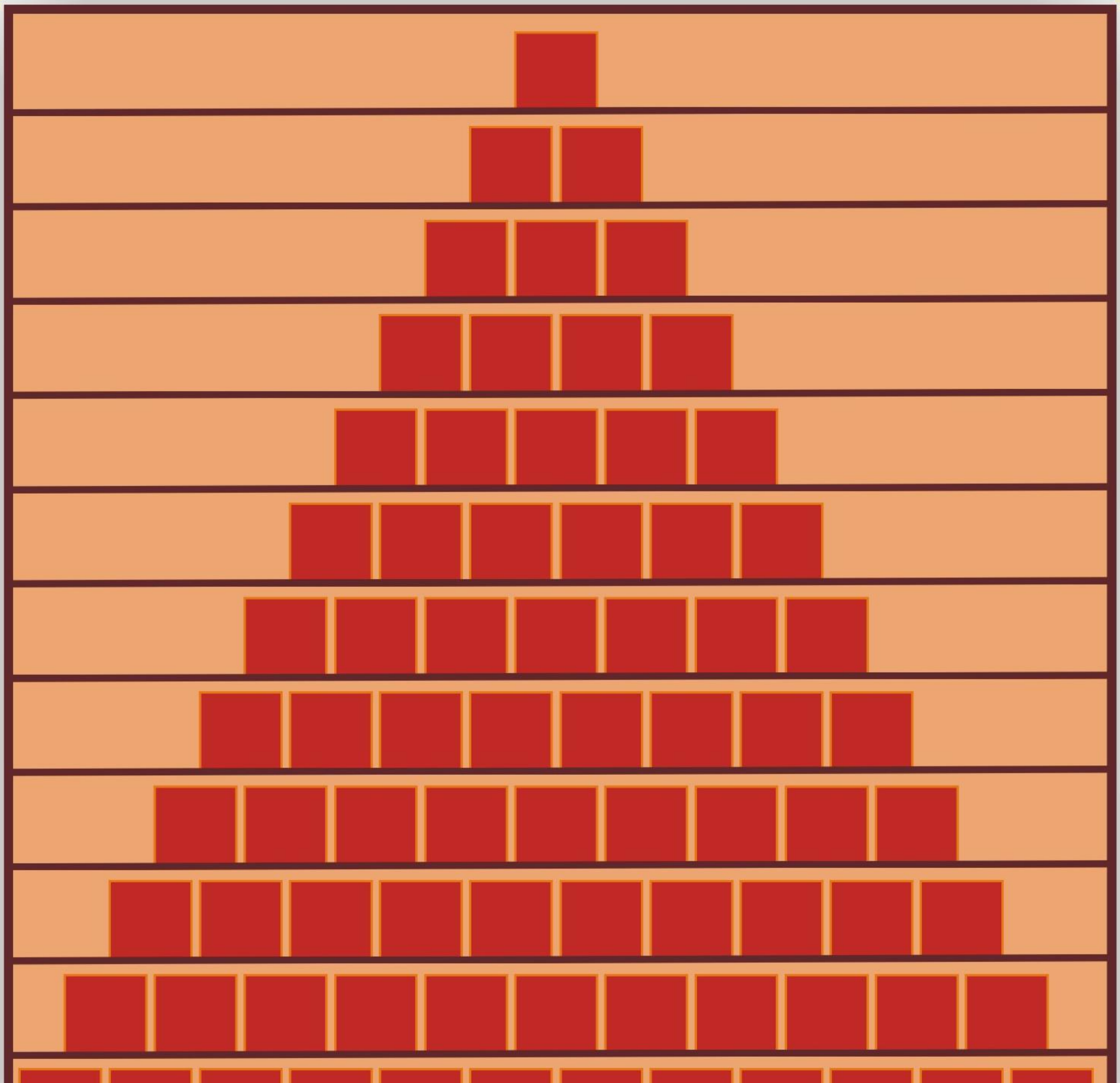
a _ د دوو مستوي‌ګانو نومونه واخلئ چې پر AD عمـود وي او ووايـئ ولې عمود دي؟

b _ د دريو قطعـه خطونـو، نومونـه واخلـئ چې پـر $ABCD$ مـستوي باندې عمود وي.

c _ د $E\hat{D}F$ زاويه قايمه ده.   d _ د $D\hat{F}C$ زاويه قايمه ده.

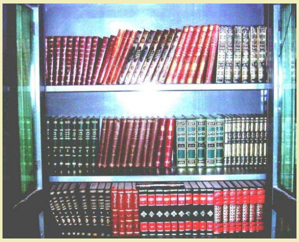
ځلورم ځپرکی

ترادفونه او سلسلي



تـرادفـونه

Sequence



په مخامخ شکل کې څه ډول ترتیب وینئ.

هر ترتیب چې شتون لري، توضیح یې کړئ.

تعریف: د $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ عددونه د عددونو د ترادف په نامه یادیږي،
یا ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي. غیر منظم دعددونو لیکل یو ترادف نه دی.

له پورتنیو عددونوڅخه هر یو د نومونږي ترادف حدونه دي، a_1 یې لومړی حد او a_2 یې دویم حد او a_n دترادف n – ام حد دی، ترادف په لنډ ډول داسې لیکي: $\{a_n\}_{n\in IN}$ په دې حالت کې a_n د ترادف n – ام حد دی.

د جفتو عددونو ترادف	$2,4,6,8,\ \ldots\ ,2n$
د طاقو عددونو ترادف	$1,3,5,7,\ \ldots\ ,2n-1$
د 5 د مضربونو ترادف	$5,10,15,20,\ \ldots\ ,5n$

معمولاً یو ترادف د یوه اختیاري n – ام حد په واسطه ټاکل او تعریفیږي؛ مثلاً:

$$a_n = 2n \quad , \quad n = 1,2,3,\ \ldots$$
$$b_n = 2n-1 \quad , \quad n = 1,2,3,\ \ldots$$
$$c_n = 5n \quad , \quad n = 1,2,3,\ \ldots$$

فعالیت

- د $\{a_n\} = \{\frac{n+1}{n}\}$ ترادف په پر مختللي شکل ولیکئ.
- د $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ترادف په پرمختللي(انکشافي) شکل ولیکئ.

هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول زیاتیږي متزاید ترادف بلل کیږي، لکه:
د جفت، طاق او 5 د مضربونو عددونوترادفونه.

او هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول کمیږي، متناقص ترادف بلل کیږي، لکه:
د 5 مضرب عددونو معکوس ترادف $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15},\ \ldots\ ,\frac{1}{5n}$

لومړی مثال: د $a_n = n^2$ او $b_n = \frac{3}{n}$ ترادفونه متزايد دي، که متناقص؟

حل:

$$a_n = n^2 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad , \quad a_n = 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$$

$$b_n = \frac{3}{n} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad , \quad b_n = 3, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \ldots$$

ليدل کېږي چې د a_n ترادف د حدونو عددي قيمت په تدريجي ډول زياتېږي، نو د a_n ترادف متزايد دی، همدارنګه ليدل کېږي چې د b_n د ترادف د حدونو عددي قيمت په تدريجي ډول کمېږي، نو د b_n ترادف يو متناقص ترادف دی.

يادښت: هغه ترادفونه چې دحدونوشمېر يې معلوم وي معين ترادفونه او هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر يې معلوم نه وي، د غير معينو ترادفونو په نامه يادېږي.

دويم مثال: د $1, 2, 4, 8 \ldots$ ترادف په پام کې ونيسئ او $n-$ ام حد يې پيدا کړئ. $a_n = 2^{n-1}$ دی.

حل: $n-$ ام حد يې $an = 2^{n-1}$ دی.

دريم مثال: که د يوه ترادف $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ وروستي حد درکړل شوی وي، 5 لومړنی حدونه يې پيدا کړئ.

حل: د 5 لومړنيو حدونو د پيداکولو لپاره $n = 1, 2, 3, 4, 5$ قيمتونه ورکوو او په ترادف کې يې وضع کوو چې په دې ډول د ترادف 5 لومړني عناصر(حدونه) په لاس راځي.

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$n = 1 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \quad , \quad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$n = 3 \quad , \quad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$n = 4 \quad , \quad a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$n = 5 \quad , \quad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

پوښتنې

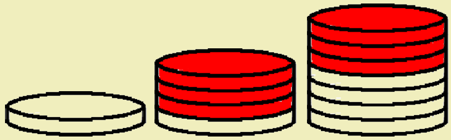
1- په لاندې ترادفونوکې $n-$ ام حد وټاکئ؟

$$\left.\begin{array}{l} 1, 3, 5, 7, \ldots \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \ldots \end{array}\right\}$$

2- که يو ترادف د $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ په شکل راکړل شوی وي، 6 لومړني پرله پسې حدونه يې وليکئ.

حسابي ترادف

Arithmetic Sequences



که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یې یو ثابت عدد وي، دا ترادف په څه نوم یادېږي.

فعالیت

- د مخامخ عددونو نوترادف په پام کې ونیسئ $5,8,11,14,17,20$
- د لومړي او وروستي حد ترمنځ توپیر څو دی؟
- د پورتنیو عددونو ترادف له څو حدونو څخه جوړ شوی دی؟
- له کیڼې څخه ښي خوا ته د پورتنیو عددونو ترادف ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف ویلای شو :

تعریف: که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي، هغه د حسابي ترادف په نوم یادېږي.

دغه ثابت عدد له ګډ توپیر(Common deference) څخه عبارت دی او په d سره ښودل کېږي که d یو مثبت عدد($d>0$) وي، ترادف متزاید او که d منفي($d<0$) وي، ترادف متناقص بلل کېږي، لکه: په لاندې مثالونو کې:

$$2,5,8,11,14,17,\ \dots$$

$$\left.\begin{array}{l} d=5-2=3 \\ d=8-5=3 \\ d=11-8=3 \end{array}\right\} \Rightarrow\ d=3>0$$

څرنګه چې $d>0$ دی نو ترادف متزاید دی.

دویم ترادف په پام کې نیسو:

$$4, 0, -4, -8, -12, -16, -20, \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} d = 0 - 4 = -4 \\ d = -4 - 0 = -4 \\ d = -8 - (-4) = -4 \\ d = -12 - (-8) = -4 \\ d = -16 - (-12) = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow d = -4 < 0$$

ځرنگه چې $d < 0$ دی نو ترادف متناقص دی.

لومړی مثال: داسې یو ترادف ولیکئ چې لومړی حد یې $\frac{3}{2}$ او گډ توپیر یې 2 وي.

حل: ځرنگه چې لومړی حد یې $a_1 = \frac{3}{2}$ او گډ توپیر یې $d = 2$ دی، نو په عمومي ډول لیکلای شو:

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots$$

$$a_2 - a_1 = d \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 - a_2 = d \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 - a_3 = d \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

اوس د $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots\ ,a_n$ قیمتونه په ترادف کې وضع کوو:

$$a_1\ , (a_1 + d)\ ,\quad (a_1 + 2d)\quad ,\quad (a_1 + 3d),\ \ldots$$

$$\frac{3}{2}\ , \left(\frac{3}{2} + 2\right)\ ,\quad \left(\frac{3}{2} + 2 + 2\right)\quad ,\quad \left(\frac{3}{2} + 2 + 2 + 2\right),\ \ldots$$

$$\frac{3}{2}\ ,\quad \frac{7}{2}\quad ,\quad \frac{11}{2}\quad ,\quad \frac{15}{2},\ \ldots$$

دویم مثال: کوم یو له لاندې ترادفونو څخه حسابي ترادف دی.

$$a)\ 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4,\ \ldots$$

$$b)\ 1, 2, 4, 8, 16,\ \ldots$$

a جزء حل: د حسابي ترادف د تعریف په پام کې نیولو سره د حدونو گډ توپیر په لاس راوړو:

$$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$$

$$d = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$d = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$d = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$
$$d = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$
$$d = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو حدونو تر منځ ګډ توپیر $\frac{1}{2}$ ثابت عدد دی، نو د حسابي ترادف تعریف پر بنسټ ویلی شو چې نوموړی ترادف یو حسابي ترادف دی.

د b جزء حل:

$$1 \ , \ 2 \ , \ 4 \ , \ 8 \ , \ 16$$
$$d = 2 - 1 = 1$$
$$d = 4 - 2 = 2$$
$$d = 8 - 4 = 4$$
$$d = 16 - 8 = 8$$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو عناصرو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد نه دی، نو ترادف حسابي ترادف نه دی.

په یوه حسابي ترادف کې د n-ام حد ټاکل:

که چېرې د یوه حسابي ترادف $a_1, a_2, \ \dots \ , a_n$ لومړی حد په a او ګډ توپیر یې d وي، د n-ام حد د پیداکولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه ګټه اخلو، ددې کار لپاره د $5, 7, 9, 11, \ \dots$ ترادف په پام کې نیسو.

$$5, 7, 9, 11, \ \dots$$
$$d = 7 - 5 = 2$$
$$5, 5+2, 5+2\cdot 2, 5+2\cdot 2\cdot 2, \ \dots$$
$$a_1 = 5, \ a_2 = 5 + 2\cdot 2 \ , \ a_3 = 5 + 2\cdot 2\cdot 2, \ \dots$$
$$a_1, a_2, a_3, \ \dots$$
$$a_1, (a_1 + d), (a_1 + 2d), (a_1 + 3d), \ \dots$$

په عمومي ډول لیکلای شو چې:

د پورتني مثال په پام کې نیولو سره په عمومي توګه کولای شو ولیکو چې:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 - a_1 = d \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 - a_2 = d \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 - a_3 = d \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$
$$\vdots$$
$$a_n - a_{n-1} = d \quad \Rightarrow \quad a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

لومړی حد	دویم حد	دریم حد	څلورم حد		n - ام حد
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	....	$a+(n-1)d$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4		a_n

په پایله کې په لاس راځي چې د a , d , n او a_n ترمنځ لاندې اړیکه شتون لري:

$$a_n = a + (n-1)d$$

لومړی مثال: د دغه . . . , 12 , 5 , -2 حسابي ترادف 30 - ام حد پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ d &= 5-(-2) = 7 \\ n &= 30 \\ a_{30} &= ? \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a_n &= a + (n-1)d \\ a_{30} &= -2 + (30-1)7 \\ a_{30} &= -2 + 29 \cdot 7 \\ a_{30} &= -2 + 203 \Rightarrow a_{30} = 201 \end{aligned}$$

دویم مثال: دلاندې حسابي ترادف د حدونو شمېر په لاس راوړئ.

$$35\ ,\ 40\ ,\ 45\ , \ldots ,2000$$

حل: پوهېږو چې:

$$\left.\begin{aligned} a &= 35 \\ d &= 40 - 35 = 5 \\ a_n &= 2000 \end{aligned}\right\}$$

$$a_n = a + (n-1)d$$
$$2000 = 35 + 5n - 5$$
$$2000 = 30 + 5n$$
$$2000 - 30 = 5n$$
$$1970 = 5n \quad \Rightarrow \quad n = 394$$

فعالیت

- که چېرې په یوه حسابي ترادف کې $d=4, a_1=-11$ وي، a_2 او a_3 حدونه پیدا کړئ.

د حسابي ترادف وسطي حد:

که د یوه حسابي ترادف درې پرله پسې حدونه د a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ولرو، په داسې حال کې چې $n=2,3,4$ دی.

$$a_{n-1}+a_{n+1}=[a_1+(n-2)d]+[a_1+nd]$$
$$=[a_1+nd-2d]+[a_1+nd]=[a_1+nd-2d+a_1+nd]$$
$$a_{n-1}+a_{n+1}=[2a_1+2nd-2d]=2[a_1+(n-1)d]=2a_n$$
$$\Rightarrow\ 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}\quad \Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

لومړی مثال: د 7 او 23 عددونو حسابي اوسط عبارت دی، له:

$$a_n=\frac{7+23}{2}=\frac{30}{2}=15$$

دویم مثال: د x عدد داسې وټاکئ چې د $\underbrace{2x+1}_{a_{n+1}},\underbrace{2x-4}_{a_n},\underbrace{3x+3}_{a_{n-1}}$ درې حده حسابي ترادف تشکیل کړي، ترادف یې ولیکئ.

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\quad\Rightarrow 2x-4=\frac{3x+3+2x+1}{2}=\frac{5x+4}{2}$$
$$4x-8=5x+4\quad\Rightarrow\ 4x-5x=4+8=12\quad\Rightarrow\ -x=12$$
$$x=-12$$

ترادف یې عبارت دی له: $2(-12)+1\quad,\quad 2(-12)-4\quad,\quad 3(-12)+3$

$$-24+1, -24-4, -36+3\quad\Rightarrow -23, -28, -33, -38, -43, \ ....$$

یادښت

که د یوه حسابي ترادف $n-$ام او $m-$ام حدونه معلوم وي، یعنې:

$$a_n=a+(n-1)d\qquad .... \ I$$
$$a_m=a+(m-1)d\qquad .... \ II$$

نـو د I اړیکـې څخـه II اړیکـه کمـوو، پـه پایلـه کـې کـولای شـو ګـډ تـوپیر داسـې پـه لاس راوړو $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$ (ثبوت یې د زده‌کوونکو دنده ده) چې په یاد شوي فورمول کې d ګډ تـوپیر، a_n د تـرادف $n-$ ام حد، a_m د ترادف $m-$ ام حد دی.

دریم مثال: د یوه حسابي ترادف پنځم حد 27 او نهم حد یې 47 دی، ګډ تـوپیر او لـومړی حـد یې پیـدا کړئ، په پای کې د ترادف ۹ حدونه ولیکئ.

$$\square, \square, \square, \square, 27, \square, \square, \square, 47$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_n=47 \\ n=9 \\ a_m=27 \\ m=5 \\ d=? \\ a=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} d=\frac{a_n-a_m}{n-m}=\frac{47-27}{9-5}=\frac{20}{4}=5 \\ d=5 \\ a_n=a_1+(n-1)d \quad \Rightarrow 47=a_1+(9-1)5=a+40 \\ \Rightarrow \quad 47-40=a_1 \quad \Rightarrow a_1=7 \end{array}$$

ترادف یې عبارت دی له: $7,12,17,22,27,32,37,42,47$

هارمونیکي ترادف: د $\{a_n\}$ یوه ترادف ته هغه وخت هارمونیکي ترادف وایي چې معکوس یې $b_n=\frac{1}{a_n}$ یو حسابي ترادف وي.

لومړی مثـال: د ... $2,4,6,8,10,$ تـرادف یـو حـسابي تـرادف دی، ځکـه چې $d=2$ دی، د دغـه ترادف د حدونو معکوس یعنې ... $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10},$ یو هارمونیکي ترادف تشکیلوي.

دویم مثال: د طبیعي عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکي ترادف دی. $n-$ ام حد یې ولیکئ.

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}, \ \dots \ ,\frac{1}{n}$$

$$\{a_n\}=\frac{1}{n}$$

دریم مثال : که چېرې په یوه هارمونیکې ترادف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ او $d = -3$ وي، هارمونیکې ترادف یې په لاس راوړئ

حل:

$$\frac{1}{4}, (\frac{1}{4}-3), (\frac{1}{4}-3-3), (\frac{1}{4}-3-3-3), (\frac{1}{4}-3-3-3-3), \ldots$$

$$\frac{1}{4}, -\frac{11}{4}, -\frac{23}{4}, -\frac{35}{4}, -\frac{47}{4}, \ldots$$

فعالیت:

آیا د طبیعي طاقو عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکي ترادف دی، $n-$ ام حد یې ولیکئ.

هارمونیکي حسابي اوسط: که درې مسلسل عناصر a_{n-1} ، a_n او a_{n+1} په داسې حال کې چې $n = 2, 3, 4 \ldots$ دی، له یوه حسابي ترادف څخه وټاکل شي، څرنګه چې $\frac{1}{a_{n-1}}, \frac{1}{a_n}$ او $\frac{1}{a_{n+1}}$ د یوه هارمونیک ترادف حدونه دي لرو، چې:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1}}}{2} = \frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2} = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

په پایله کې پورتنۍ اړیکه چې هارمونیک حسابي اوسط شي، لیکلای شو:

$$\boxed{a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}}$$

مثال : د 2 او 8 عددونو هارمونیکي اوسط پیدا کړئ.

حل: له $a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$ فارمول څخه په کار اخیستنې سره لرو چې:

$$a_n = \frac{2(2 \cdot 8)}{2+8} = \frac{2 \cdot 16}{10} = \frac{16}{5} = 3.2$$

پوښتنې

1- د مخامخ ترادف 35 - ام حد پیدا کړئ. $-2\,,\ 5\,,\ 12\,,\ \ldots$

2- آیا $\frac{5}{4}, 1, \frac{3}{4}$ یو حسابي ترادف تشکیلوي؟ د پوښتنې د سموالي په صورت کې یې مشترک توپیر پیدا کړئ.

3- د $2\sqrt{2}$ او $16\sqrt{2}$ تر منځ حسابي اوسط په لاس راوړئ.

4- که $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_{10} = \frac{84}{2}$ وي د d قیمت په لاس راوړئ.

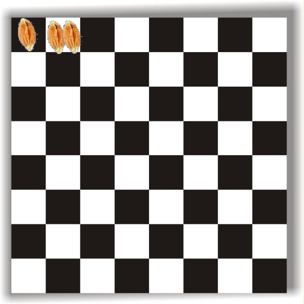
5- له لاندې ترادفونو څخه کوم یو حسابي ترادف نه دی.

$a)\ 2\,,\ \frac{9}{4}\,,\ \frac{5}{2}\,,\ \frac{11}{4},\ \ldots$

$b)\ 3\,,6\,,9\,,12,\ \ldots$

هندسي ترادف

Geometric Sequences



که د شطرنج د يوې تختې په لومړۍ خانـه کـې يـوه دانـه غـنـم او پـه دويمـه خانه کې يې دوه دانې غنم په همدې ډول که په هـره وروستـی خانـه کـې د مخکنۍ خانې دوه برابره غنم کېښودل شي، نو د شطرنج د تختې په اخيره خانه کې(يوه د شطرنج تخته 64 خانې لري) به څو دانې غنم وي.

فعاليت

- د مخامخ ترادف عددونه په پام کې ونيسئ. $3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 48, \ldots$
- د پورتني ترادف د عناصرو ترمنځ کومه اړيکه موجوده ده؟
- د پورتني ترادف د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ نسبت پيدا او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

له پورتني فعاليت څخه کولای شو لاندې پايله بيان کړو:

پايله

هغه ترادف چې د دوو پر له پسې حدونو ترمنځ نسبت يې يو ثابت عدد q وي، د هندسـي تـرادف پـه نامـه يادېږي، يعنې:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q \quad , \ n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

$$a_{1+1} = a_1 \cdot q \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 q$$

$$a_{2+1} = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_{3+1} = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

دلته q ګډ نسبت او a_1 د ترادف لومړی حد دی.

هندسي ترادف هغه وخت تاکل کېږي چې لومړی حد او ګډ نسبت يې معلوم وي.

لومړی مثال: د $\ldots, 6, 12, 24, 48, 96$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ ،ګڼ نسبت یې په لاس راوړی.

حل: هر حد یې په مخکیني حد باندي وېشو:

$96 \quad 48 \quad 24 \quad 12 \quad 6$

$q = \frac{48}{96} = \frac{1}{2} \qquad q = \frac{24}{48} = \frac{1}{2} \qquad q = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \qquad q = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

لیدل کېږی چې $q = \frac{1}{2}$ یو ثابت عدد وی.

فعالیت

- په یوه هندسي ترادف کې $a_1 = 2$ او $q = 3$ دی، a_2 , a_3 او a_4 حدونه پیدا کړئ.

یادونه

$q > 1$ لپاره ترادف متزاید د ی.

$q < 1$ لپاره ترادف متناقص دی.

$q = 1$ لپاره ثابت ترادف په لاس راځي.

دویم مثال: د $\ldots, 100, 300, 900, 2700$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ لومړی حد او ګڼ نسبت یې په لاس راوړئ او وواياست چې پورتنی هندسي ترادف متزاید دی او که متناقص.

حل:

لومړی حد $= a = 2700$

ګڼ نسبت $= q = \frac{900}{2700} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

په پورتني مثال کې $q = \frac{1}{3} < 1$ دی، نو نوموړی ترادف متناقص دی.

په هندسي ترادف کې د n – ام حد پیدا کول:

که په یوه هندسي ترادف کې a لومړی حد، q ګډ نسبت او n د ترادف د حدونو شمېر وي،نو د n – ام حدد پیدا کولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه کار اخلو.

که چېرې هندسي ترادف د $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \; ......an$ په پام کې ونیسو، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$a_1 = a_1$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$$

$$q = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$q = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 q^{n-2}) \cdot q = a_1 q^{n-1}$$

اوس د $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \; ....$ په ترادف کې یې قیمتونه ږدو:

لومړی حد	دویم حد	دریم حد	څلورم حد		n - ام حد
a_1	a_2	a_3	a_3	, ... ,	a_n
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	, ... ,	$\downarrow$
a_1	$a_1 q$	$a_1 q^2$	$a_1 q^3$	, ... ,	$a_1 q^{n-1}$

یعنې په هندسي ترادف کې n – ام حد یا عمومي حد، د دغې اړیکې $a_n = a \cdot q^{n-1}$ په واسطه پیدا کېږي.

لومړی مثال: د لاندې هندسي ترادف شپږم حد پیدا کړئ.

حل: $5\ ,\ -10, 20, -40,\ ....$

$$\left.\begin{array}{l} a=5 \\ q=\frac{-10}{5}=-2 \\ n=6 \\ a_6=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n=aq^{n-1} \\ a_6=5(-2)^{6-1} \\ a_6=5(-2)^5 \Rightarrow a_6=5(-32) \\ a_6=-160 \end{array}$$

دویم مثال: د .... , 2 , 4 , 8 هندسي ترادف دوولسم حد په لاس راوړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=12 \\ a=8 \\ q=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a_n=aq^{n-1} \\ a_{12}=8(\frac{1}{2})^{12-1}=8(\frac{1}{2})^{11}=8\frac{1}{2^{11}} \\ a_{12}=\frac{8}{2^{11}}=\frac{2^3}{2^{11}}=2^{3-11}=2^{-8}=\frac{1}{2^8}=\frac{1}{256} \end{cases}$$

د هندسي ترادف وسطي حد:

که a, M, b د هندسي ترادف پر له پسې حدونه وي، د $a\ ,M$ او $b\ ,M$ ترمنځ اړیکه پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} q=\frac{M}{a} \\ q=\frac{b}{M} \end{array}\right\} q=q \Rightarrow \frac{M}{a}=\frac{b}{M} \Rightarrow M^2=a\cdot b$$

$$M=\sqrt{a\cdot b}$$

له پورتني فورمول څخه ویلی شو کـه چېرې a او b دوه مثبت حقیقي عددونـه وي، نـو د M حقیقـي مثبت عدد ته د a او b هندسي وسط(Geometric mean) وایي.

دریم مثال: د 3 او 12 عددونو هندسي وسط پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=12 \end{array}\right\} M=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$$

$$M=6$$

څلورم مثال: د $32, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, 2$ هندسي ترادف نا معلوم حدونه پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=2 \\ n=5 \\ a_5=32 \\ q=? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_5=a\cdot q^{n-1} \quad \Rightarrow 32=2q^{5-1} \Rightarrow 32=2q^4 \\ q^4=\dfrac{32}{2}=16 \quad \Rightarrow q^4=16 \quad \Rightarrow q^4=2^4 \Rightarrow \boxed{q=2} \end{array}$$

$$a_1=2$$

$$a_2=a_1\cdot q=2\cdot 2=4$$

$$a_3=a_2\cdot q=a_1q^2=2\cdot 2^2=8$$

$$a_4=a_3\cdot q=a_1\cdot q^3=2\cdot 2^3=16$$

نو هندسي ترادف یې عبارت دی له: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 یا $2, 4, 8, 16, 32$

فعالیت

- که په هندسي ترادف کې a_n، n – ام حد، n د ترادف د حدونو شمېر او q ګډ نسبت وي، د q لپاره عمومي فورمول پیدا کړئ.

پنځم مثال: x داسې وټاکئ چې له لاندې حدونو څخه یو هندسي ترادف جوړ شي.

$$x-1 \ , \quad x+3 \quad , \ x+1$$

$$M=\sqrt{a\cdot b} \quad \Rightarrow (x+3)=\sqrt{(x-1)(x+1)} \quad \Rightarrow (x+3)^2=(x-1)(x+1)$$

$$x^2+6x+9=x^2-1 \Rightarrow 6x+10=0 \ , \ x=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$$

$$x=-\frac{5}{3}$$

پوښتنې

1- د هندسي ترادف 5 حدونه داسې ولیکئ چې لومړی حد یې 5 او اخیري حد یې $\frac{5}{16}$ وي.

2- کوم یو له لاندې ترادفونو څخه هندسي ترادف دی.

$a)\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \ldots$

$b)\ -4, -2, 0, 2, 4,\ \ldots$

3- د $\ldots,\ \frac{5}{8},\ \frac{5}{2}, 5$ هندسي ترادف دوولسم حد پیدا کړئ.

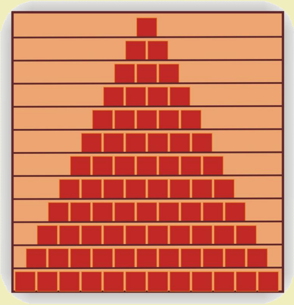
4- د $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$ هندسي وسط په لاس راوړئ.

5- د $27,\ ?,\ ?,\ ?,\ \frac{1}{3}$ حدونو تر منځ درې هندسي وسطونه په لاس راوړئ.

د ترادفونو قسمي مجموعه

a - په لسم کتارکې د قوطيو شمېر څو دی؟

b - په الماری کې د ټولو قوطيو شمېر پيدا کړئ؟



فعاليت

- د $2,4,6,8, \ ...$ ترادف په پام کې ونيسئ.
- د دويم او دريم حدونو د جمعي حاصل وليکئ.
- د لس لومړيو پرله پسې حدونو د جمعي حاصل پيدا کړئ.
- د $n-$ام حد د جمعي حاصل وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانېږي:

څرنګه چې د لومړي د n حدونو د جمعي حاصل مشکل دی چې ټول n حدونه يې وليکو، نو ځکه يې دوه يا درې لومړي حدونه ليکو او وروسته له دريو ټکو $n-$ام حد ليکو.

څرنګه چې يو ترادف د بې نهايت حدونو لرونکی دی، که د زياتو حدونو د جمعي حاصل، لکه 100 , 1000 او داسې نورو حدونو په پام کې وي، نو د جمعي حاصل يې ستونزه جوړوي.

په عمومي ډول د ترادف د n لومړيو حدونو $a_1 \ , a_2 \ , a_3 \ , \ ... \ , a_n$ د جمعي حاصل په لاندې ډول ليکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

د اسانتيا او لنډيز لپاره په محاسبوکې $\sum$ له دې سمبول څخه کار اخلي.

د $\sum$ پورتنۍ او ښکتنۍ نښې دا راښيي چې i له 1 څخه تر n پورې ټول طبيعي عددونه اخلي، i د انډکس په نامه يادېږي. د يوې مجموعې د انډکس لپاره هر حرف کارول کېږي، خو د i, n, k, j حروف ډېر معمول دي.

مثلاً: $\sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{i=1}^{n} 2i = \sum_{j=1}^{n} 2j = 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdot\cdot\cdot\cdot + 2n$

لومړی مثال: لاندې مجموعه ($\sum_{i=1}^{7} \sum \frac{1}{1^i}$) په انکشافی شکل ولیکئ.

حل: $\sum_{i=1}^{7} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{1089}{420}$

دویم مثال: لاندې د جمعي حاصل د ($\sum$) په شکل ولیکئ.

$a)\ 1+3+5+7+ \ \dots \ +(2n-1)$

$b)\ 1+4+9+ \ \dots \ +n^2$

د a جزء حل:

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

د b جزء حل:

$$1+4+9+ \ \dots \ +n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

دریم مثال: لاندې مجموعه په انکشافي شکل ولیکئ.

$$\sum_{i=4}^{n} i(i+2) = ?$$

حل:

$$\sum_{i=4}^{n} i(i+2) = 4(4+2)+5(5+2)+6(6+2)+7(7+2)+\dots+n(n+2)$$

$$= 4\cdot 6 + 5\cdot 7 + 6\cdot 8 + \dots + n(n+2)$$

$$= 24+35+48+63+\dots+n(n+2)$$

څلورم مثال: د دغې مجموعې $\sum_{n=7}^{10} \frac{n+1}{n-1}$ حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\sum_{n=7}^{10} \frac{n+1}{n-1} = \frac{7+1}{7-1} + \frac{8+1}{8-1} + \frac{9+1}{9-1} + \frac{10+1}{10-1} = \frac{8}{6} + \frac{9}{7} + \frac{10}{8} + \frac{11}{9}$$

$$= \frac{4032+3888+3780+3696}{3024} = \frac{15396}{3024} = \frac{5132}{108}$$

تر اوسه مو يوازې د يوه ترادف د n حدونو د جمعې حاصل وڅېړه، که وغواړو د يوه ترادف د $\{a_n\}_{n\in IN}$ ټولو حدونو د جمعې حاصل پيدا کړو، په دې صورت کې ليکو:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}a_i$$

په دې حالت کې i ټول طبيعي عددونه اخېستلای شي.

د $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ سلسله د بې نهايت سلسلې(Series) په نامه يادېږي.

د $a_1+a_2+a_3+\ldots$ عددونه د سلسلې حدونه او a_n د سلسلې $n-$ام حد يا دسلسلې عمومي حد بلل کيږي.

څرنگه چې موږ نشو کولای، د عددونو بې نهايت شمېر جمع کړو، خوپه رياضي کې د ځينو قاعدو په کارولوسره کولای شو، يوې سلسلې ته ديوې مجموعې نسبت ورکړو، خو دلته غواړو د يوې سلسلې د n حدونو مجموعه پيدا کړو.

د يوې سلسلې د n لومړيو عناصرو مجموعه $\sum_{i=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ د نومورې سلسلې د n حدونو د قسمي مجموعې په نامه يادېږي، که هغه په S_n وښيو، نو لرو:

$$S_1=a_1$$
$$S_2=a_1+a_2$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

مثال: د $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ سلسلې S_6 او S_8 حساب کړئ.

حل:

$$S_6=1+2+3+4+5+6=21$$
$$S_8=1+2+3+4+5+6+7+8=36$$

که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ او $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دوې سلسلې او c یو ثابت عدد وي لاندې، خاصیتونه د قسمي مجموعو لپاره سم دي:

$$\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \ \dots\ + c = nc$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

پوښتنې

1. لاندې مجموعې حساب کړئ.

a) $\sum_{i=1}^{6} \sqrt{i}$ b) $3\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$ c) $\sum_{k=1}^{3} (4k^2 - 3k)$

2. لاندې مجموعې د $\sum$ په شکل کې ولیکئ.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{19}{20}$

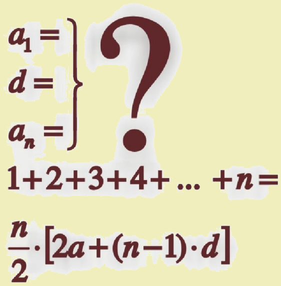
b) $1 + 4 + 9 + \dots + n^2$

c) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)$

3. لاندې قسمي مجموعې په لاس راوړئ.

a) $\sum_{i=4}^{n} i(i+2)$ b) $\sum_{i=1}^{n} (3i-2)$ c) $\sum_{i=1}^{n} (2+5i)$

د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسمي مجموعه



که $a_1 , a_2 , a_3 ,...\ \ ,a_n$ يو حسابي ترادف وي، نو $a_1+a_2+a_3+...+a_n$ د يوې حسابي سلسلې قسمي مجموعه کېدلای شي؟

که چېرې ديوه حسابي ترادف د حدونو ترمنځ د جمعې نښه وي، هغې ته حسابي سلسله ويل کېږي. ياپه بل عبارت د يوه حسابي ترادف د جمعې حاصل ته حسابي سلسله وايي.

په يوه حسابي ترادف کې چې لومړی حد يې a ګډ فرق يې d او اخيري حد يې a_n وي، د حدونود جمعې لپاره عمومي فورمول داسې په لاس راوړو:

$$S=a+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_{11}+3d)+...+(a_n-2d)+(a_n-d)+a_n \quad ...\ \text{I}$$

$$S=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+(a_n-3d)+...+(a_1+2d)+(a_1+d)+a_1 \quad ...\ \text{II}$$

د I او II اړيکې خوا په خوا جمع کوو:

$$2S=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+...+(a_1+a_n)+a_1+a_n}_{n \text{ خلې } n(a+a_n)}$$

$$2S=n(a+a_n) \Rightarrow S=\frac{n}{2}(a+a_n)...\text{I}$$

د I فورمول د حسابي سلسلې جمع راښيي چې لومړی حد، اخيري حد اود جملاتو شمېر يې معلوم وي.

لومړی مثال: د حسابي سلسلې د جمعې حاصل په لاس راوړئ، داسې چې $a_n = 25, a = 4$ او د حدونو شمېر يې 8 وي.

حل:

$a_1 = 4$

$a_n = 25 \qquad S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$n = 8 \qquad S = \frac{8}{2}(4+25) \Rightarrow S = 4(29) = 116$

که چېرې په يوه حسابي سلسله کې لومړی حد، د حدونو شمېر او ګډ توپير ورکړل شوی وي، د جمعې حاصل يې له لاندې اړيکې څخه په لاس راځي:

$$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$S = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \;......... \; \text{III}$$

دويم مثال: د لاندې سلسلې د 201 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

$$7 + 11 + 15 + \ldots$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 7 \\ d = 4 \\ n = 201 \\ S_{201} = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ S_{201} = \frac{201}{2}[2\cdot 7 + (201-1)4] \\ S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 200\cdot 4) \quad \Rightarrow \quad S_{201} = \frac{201}{2}(14+800) = \frac{201}{2}\cdot 814 \\ S_{201} = 81807 \end{array}$$

فعاليت

- د طبيعي عددونو سلسله په پام کې ونيسئ لومړی حد، ګډ تـوپير او $n-$ام حـد يـې وليکـئ وروسـته د مسلسلو طبيعي عددونو د جمعې دحاصل عمومي فورمول په لاس راوړئ.

په ياد ولرئ: د طبيعي جفتو پر له پسې عددونو د جمعې حاصل هم يوه حسابي سلسله ده چې فورمول يـې په لاندې ډول په لاس راوړو: $2+4+6+8 \quad ...$

$$\left.\begin{aligned} a &= 2 \\ d &= 2 \\ n &= n \\ S_n &= ? \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \\ S_n &= \frac{n}{2}[2\cdot 2+(n-1)2] \\ S_n &= \frac{n}{2}[4+2n-2] = \frac{n}{2}(2+2n) \quad \Rightarrow \quad S_n = n(n+1) \end{aligned}$$

دريم مثال: د جفتو پر له پـسې عـددونو د سلـسلې $(2+4+6+8+...)$ د 200 لومړيوحـدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

حل:

$$\left.\begin{aligned} n &= 200 \\ S_{200} &= ? \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} S_n &= n(n+1) \\ S_{200} &= 200(200+1) \quad \Rightarrow \quad S_{200} = 200(201) \\ S_{200} &= 40200 \end{aligned}$$

څلورم مثال: د $2+4+...+$ جفتو عددونو د سلسلې د 200 حدونو مجموعه پيدا کړئ.

فعاليت

- د طبيعي طاقو پرله پسې عددونو د حسابي سلسلې د جمعې حاصل فورمول پيدا کړئ.

پوښتنې

1. د لاندې حسابي ترادفونو لسم او n – ام حدونه پیدا او همدرانګه د نوموړو ترادفونو د لسو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$i)\ \ 2,0,-2,-4,\ \dots$

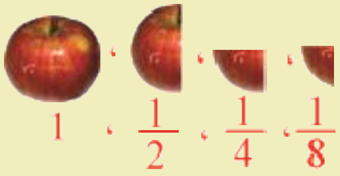
$ii)\ 1,5,9,13,\ \dots$

$iii)\ -2,-1,0,1,2,\ \dots$

2. که یو ترادف د $2,5,8,11,\ \dots$ په ډول راکړل شوی وي. د لاندې مجموعو قیمتونه حساب کړئ.

$a)\ \ S_8$ $\qquad\qquad$ $b)\ \ S_{10}$

د يوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعي حاصل



که چېرې يوه مڼه نيمه او نيمه بيا نيمه او همداسې ادامه ورکړو يو هندسي ترادف په لاس راځي، له لومړي برخې نيولې، ټول برخې سره جمع کړو چې د جمعي حاصل يې مساوي په 2 مڼو شي.

فعاليت

- يو هندسي ترادف چې لومړی جمله يې a_1 او د دوو پرله پسې جملو ترمنځ نسبت يې مساوي په q راکړل شوی وي، لاندې فعاليت سرته ورسوئ.
- د ترادف دويمه جمله څو ده؟
- که چېرې دويمه جمله په q کې ضرب شي، دضرب حاصل يې له دريمې جملې سره پرتله کړئ.
- د ترادف د n جملو د جمعي حاصل د فورمول پيداکولو لپاره څه وړانديز لرئ؟

پايله:

په يوه هندسي ترادف کې هر راتلونکی حد د مخکيني حد له ضرب څخه په q کې، په لاس راځي. دا خبره د ټولو حدونو لپاره يوه باوري خبره ده، په دې ډول د يوه هندسي ترادف $\{a_n\}$ د n جملو د جمعي حاصل $(S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ قيمت عبارت دی، له: $q \neq 1$ ، $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

د پورتنۍ اړيکې ثبوت کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ \ldots \ + a_1q^{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ I$$

$$S_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ \ldots \ + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad \ldots\ldots\ldots \ II$$

له I اړيکې څخه د II اړيکه کموو:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n)$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$q \neq 1$$

د پورتنۍ رابطې صورت او مخرج په (1-) کې ضربوو

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{(q-1)}$$

پاسنۍ اړيکه هغه اړيکه ده، چې د هندسي ترادف د n جملو د جمعي حاصل په لاس راکوي.

لومړی مثال: په یوه هندسي ترادف کې لومړی حد $a_1 = 2$ او ثابت نسبت $q = \frac{1}{2}$ دی.
د پاسني ترادف 5 لومړي حدونه او د لسو جملو د جمعې حاصل پیدا کړئ.
حل: پوهیږو چې $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ده، نو:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \\ S = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} a_1 = 2(\frac{1}{2})^0 = 2 & a_4 = 2(\frac{1}{2})^{4-1} \\ a_2 = 2(\frac{1}{2}) = 1 & a_4 = 2(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4} \\ a_3 = 2(\frac{1}{2})^{3-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} & a_5 = 2(\frac{1}{2})^4 = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \end{array}$$

$$S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 2 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{2-1}{2}} = 2\frac{\frac{1024-1}{1024}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = 2\frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4092}{1024} = 3.99609375$$

دویم مثال: د لاندې هندسي ترادف د څو جملو مجموعه 80 کیږي؟

$2, 6, 18, \ldots$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{6}{2} = 3 \\ n = ? \\ S = 80 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} \\ 80 = \frac{2[(3)^n - 1]}{3-1} \\ 80 = (3)^n - 1 \Rightarrow 80 + 1 = (3)^n \\ 81 = 3^n \Rightarrow (3)^4 = 3^n \\ \Rightarrow n = 4 \end{array}$$

یعنې د پاسني هندسي ترادف د 4 جملو مجموعه 80 کیږي.

پوښتنې

1. په $\ldots, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2$ هندسي ترادف کې د 10 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
2. د $384, \ldots, 3, 6, 12$ هندسي ترادف د حدونو شمیر او مجموعه پیدا کړئ.
3. په $\ldots, 4, 12, 36$ ترادف کې د څو جملو د جمعې حاصل 484 کیږي، د n – ام حد قیمت پیدا کړئ.

لایتناهي هندسي سلسلې

که د ترادف جملو ته په غور پاملرنه وکړو، په اسانۍ سره لیدل کېږي چې ترادف، جمله په جمله کوچنی کېږي.

آیا هر هندسي ترادف یوه عدد ته نږدې کېږي؟

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}, |q|<1$$

که چېرې په یوه هندسي سلسله کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر يې معلوم نه وي، د متباعدې سلسلې(Divergent series) په نامه یادېږي.

او که چېرې $|q|<1$ وي، د متقاربې سلسلې(Convergent series) په نامه یادېږي. د متقاربو او متباعدو سلسلو د جمعې حاصل د پیداکولو فورمول:

$$S = a\frac{1-q^n}{1-q} = a\frac{-(q^n-1)}{-(q-1)} = a(\frac{q^n-1}{q-1})$$

که سلسله متباعده وي $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر بې نهایته وي، یعنې $n \to \infty$ نو پوهېږو چې:

$$S_\infty = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{\infty - a}{q-1} = \infty \Rightarrow S_\infty = \infty$$

که سلسله متقاربه وي($|q|<1$) او د جملو شمېر بې نهایت وي، نو $q^n \to 0$ کوي.

$$S = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a-a\cdot 0}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

یعنې که متقارب سلسله ($|q|<1$) او د جملو شمېر يې بې نهایت وي، د نوموړې سلسلې د جمعې حاصل عبارت دی له: $S_\infty = \frac{a}{1-q}$

لومړی مثال: د $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...$ سلسلې د جمعې حاصل محاسبه کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a=1$, $q=\frac{1}{2}$ دی، ځرنګه چې $|q|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=2$$

دویم مثال: که په یوه هندسي سلسله کې $a_1=27$ او $q=\frac{1}{3}$ وي، د سلسلې دحدونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې $|q|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده:

$$a_1+a_2+a_3+\ ...\ =\frac{a}{1-q}$$

$$27+9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...=\frac{27}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{\frac{3-1}{3}}=\frac{27}{\frac{2}{3}}$$

$$27\cdot\frac{3}{2}=\frac{81}{2}=40.5$$

دریم مثال: $0.6\overline{23}$ پیریودیک(متوالي) اعشاري کسر په عام کسر واړوئ.

حل: دا عدد کولای شو په لاندې ډول په هندسي ترادف واړوو.

$$0.6\overline{23}=0.6232323...=0.6+0.023+0.00023+0.0000023+\ ...$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\frac{23}{10000000}+\ ...$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{10000})+\ ...\ ]$$

د قوس دننه دهندسي ترادف د جمعې حاصل دی لومړی حدیې (۱) او د حدونو ترمنځ نسبت یې $\frac{1}{100}$ دی.

په پاسنۍ سلسله کې $a=1$ او $1>|q|=\left|\frac{1}{100}\right|=\frac{1}{100}$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{100})^2+...]$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}}$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{100}{99}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{6}{10}+\frac{23}{990}=\frac{594+23}{990}=\frac{617}{990}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{617}{990}$$

شپږم مثال: د $0.\bar{3}$ متوالي اعشاري کسر د هندسي سلسلې په کارولو سره په عام کسر واړوئ.

حل: پوهېږو چې:

$$0.\bar{3}=0.3333\ ...\ =0.3+0.03+0.003+0.0003+\ ...$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ ...$$

$$=\frac{3}{10}[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ ...\ ]$$

لیدل کېږي چې په پاسنۍ سلسله کې $a=0.3$ او $1>|q|=\left|\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$S=\frac{a}{1-q}=0.\bar{3}=\frac{3}{10}\cdot\frac{a}{1-q}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{10-1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow 0.\bar{3}=\frac{1}{3}$$

پوښتنې

1. لاندې هندسي مجموعې په لاس راوړئ.

$i)\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots$, $ii)\ 5+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots$

2. لاندې اعشاري متوالي کسرونه په عام کسر واړوئ.

$a)\ 0.2\overline{4}$ $b)\ 0.\overline{5}$

د خلورم څپرکي مهم ټکي

د ترادف تعریف: $a_1, a_2, a_3, \quad \dots \quad, a_n$ د عددونو د ترادف په نامه یادیږي.

پورتني هر یوه عدد ته د ترادف حد یا جمله وایي، a_1 د ترادف لومړی حد او a_n د ترادف $n-$ام حد دی

یا په بل عبارت، ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو

ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي.

حسابي ترادف: که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد وي، نو نوموړی

ترادف د حسابي ترادف په نامه یادیږي.

د حسابي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n+1}, a_n, a_{n-1} ولرو، نو: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

په حسابي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول $a_n = a + (n-1)d$

هندسي ترادف: هغه ترادف چې د هغه د هر وروستي او مخکیني حد تر منځ نسبت یو ثابت عدد q وي،

د هندسي ترادف په نامه یادیږي، په هندسي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول: $a_n = aq^{n-1}$

د هندسي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه $a_{n+1}\ ,\ a_n\ ,\ a_{n-1}$ په داسې حال کې چې

$n = 2, 3, \ 4, \ \dots$ هندسي ترادف حدونه وي، نو د ترادف وسطي حد عبارت دی له: $a_n = \sqrt{(a_{n+1})(a_{n-1})}$

د ترادفونو قسمي مجموعه: $a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots \ + a_n = \sum\limits_{1=1}^{n} a_i$ د بې نهایته سلسلې (Series) په نامه

یادیږي.

او د $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \ a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots +$ د نوموړې $n-$ام سلسلې د جمعې قسمي حاصل دی.

د حسابي ترادف د n لومړیو حدونو قسمي حاصل جمع: $S = \dfrac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

د هندسي ترادف د n لومړیو جملو قسمي حاصل جمع: $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

بې نهايت هندسي سلسلې: په يوه هندسي سلسله کې که $|q|<1$ وي، متقاربه سلسله او د n جملو د جمعې حاصل يې د $\frac{a}{1-q}$ عدد ته نږدې کيږي او قيمت يې د دغه فورمول $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$ په واسطه محاسبه او لاسته راځي.

هغه هندسي سلسله چې په هغې کې $|q|\geq 1$ او د حدونو شمېر يې هم بې نهايته وي، سلسله متباعد او د n لومړيو جملو مجموعه يې هم بې نهايته ده، يعنې $S_n = \infty$

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې پيدا او له هغه شخه کرې تاو کړئ.

1. د $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ ترادف $n-$ام حد کوم دی؟

$a)\ \frac{\sqrt{n}-1}{n}$ $\quad b)\ \frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$ $\quad c)\ \frac{n}{n-1}$ $\quad d)\ \frac{n+1}{n}$

2. که $a_n = \frac{3n-1}{2n-1}$ د ترادف $n-$ام حد وي، د دغه ترادف څووم حد $\frac{11}{7}$ دی؟

$a)\ 3$ $\quad b)\ 4$ $\quad c)\ 5$ $\quad d)\ 6$

3. د $-9, -5, -1, 3, \ldots$ حسابي ترادف دوولسم حد عبارت دی، له:

$a)\ 35$ $\quad b)\ 38$ $\quad c)\ -35$ $\quad d)\ -38$

4. د $0.1, 0.4, 0.7, 1, 1.3, \ldots$ حسابي ترادف ګډ توپير عبارت دی، له:

$a)\ 0.3$ $\quad b)\ 0.1$ $\quad c)\ \frac{2}{3}$ $\quad d)\ -\frac{2}{3}$

5. د $96, 48, 24, 12, 6, \ldots$ هندسي ترادف ګډ نسبت عبارت دی له:

$a)\ -\frac{1}{2}$ $\quad b)\ \frac{1}{2}$ $\quad c)\ \frac{2}{3}$ $\quad d)\ -\frac{2}{3}$

6. د $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \ldots$ هندسي ترادف لسم حد عبارت دی، له:

$a)\ \frac{3}{512}$ $\quad b)\ \frac{5}{510}$ $\quad c)\ -\frac{5}{512}$ $\quad d)\ \frac{5}{512}$

7. د يوه هندسي ترادف د n جملو د جمعي حاصل فورمول عبارت دی، له:

$a)\ S_n = a\frac{1+q^n}{1-q}$ $\quad b)\ S = a\frac{q^n-1}{q-1}$

$c)\ S = a\frac{1+q^n}{1+q}$ $\quad d)$ هيڅ يو

8. په بې نهايته هندسي متقاربو سلسلو کې ګډ نسبت عبارت دی، له:

$a)\ q=0$ $\quad b)\ |q|>1$ $\quad c)\ |q|<1$ $\quad d)$ هيڅ يو

لاندې پوښتنې حل کړئ:

1. څو دوه رقمي طبیعي عددونه لرو چې د څلورو مضرب وي؟

2. د 21 او 31 ترمنځ په بېلا بېل ډول درې حسابي وسطونه ولیکئ. 21,☐,☐,☐,31

3. که دیوه حسابي ترادف د لومړی او وروستی جملې مجموعه ($a_1 + a_n = 24$) او د n لومړیو جملو مجموعه یې 3720 وي، د نوموړي ترادف د حدونو شمېر وټاکئ؟

4. د لاندې ترادف د 100 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$3, 5, 7, 9, 11, \ ...$

5. که د یوه هندسي ترادف دویمه جمله 6 او اوومه جمله یې 192 وي ،ګډ نسبت یې وټاکئ.

6. د یوه هندسي ترادف د 8 لومړیو جملو د جمعې قسمي حاصل 17 برابره ،د هغه د څلورو لومړیو جملو دی، د نوموړي ترادف ګډ نسبت حساب کړئ.

7. د لاندې سلسلې د جمعې قسمي حاصل په لاس راوړئ.

$0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + ...$

8. د یوه ناپایه هندسي ترادف لومړی حد 9 او پنځم حد یې $\frac{1}{9}$ دی، د نوموړي ترادف د حدونو د جمعې حاصل پیدا کړئ.

9. د 3 او 96 عددونو تر منځ 4 هندسي وسطونه په بېلا بېل ډول ولیکئ.

3,☐,☐,☐,☐,96

10. د $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + ...$ هندسي سلسلې د اتو لومړیو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

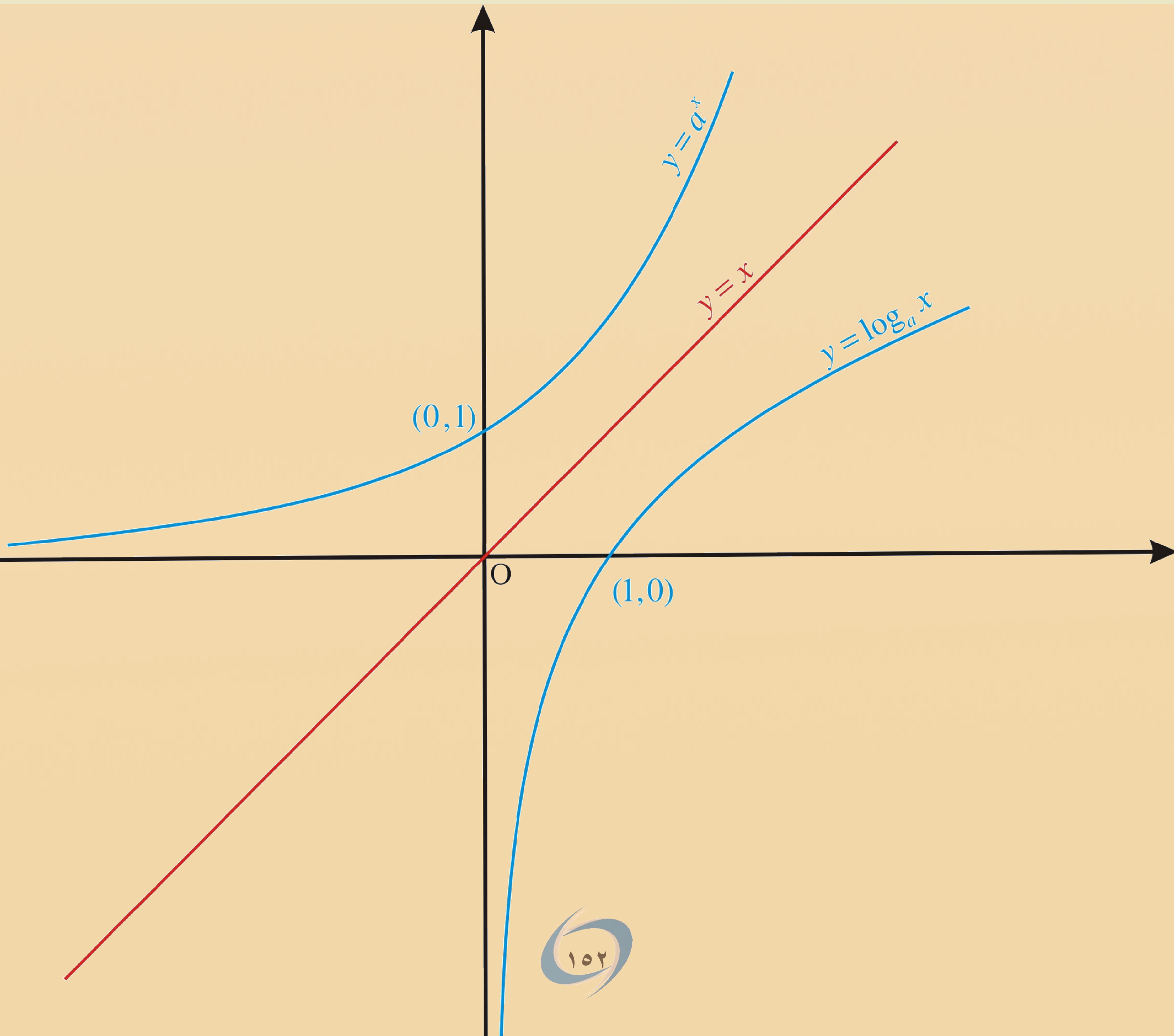
11. که $a = 4$ او $d = 3$ وي، هارمونیکي ترادف د $n = 12$ لپاره په لاس راوړئ.

12. لاندې متوالي کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

$a)\ 2.\overline{8}$ $\qquad b)\ 3.\overline{57}$

پنځم څپرکی

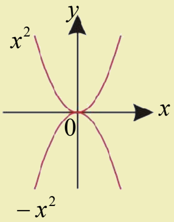
لوګاریتم

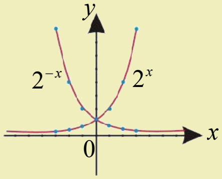


$y=a^x$
$y=x$
$y=\log_a x$
(0,1)
O
(1,0)

اکسپوننشیل تابع ګاني

Exponential function





پوهيږئ چې د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ تابع ګانو ګرافونه نظر y محور ته يوله بل سره متناظر دی. آيا تراوسه مو د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو د ګرافونو په هکله فکر کړی دی؟

تعريف

که چېرې a يو مثبت عدد او $a\neq 1$ وي، نو د $f(x)=a^x$ تابع ته د a په قاعده اکسپوننشيل تابع وايي.

$$a\in IR^+\setminus\{1\}\ ,\quad x\in IR\ ,\quad f:\ IR\to IR^+$$

$$f(x)=a^x$$

$f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ اکسپوننشيل تابع ګاني د 2 په قاعده دي.

فعاليت

- د $x\in Z$ مختلفو قيمتونو لپاره د $f(x)=2^x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=2^x$ تابع ګراف د y محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟
- آيا د $f(x)=2^x$ تابع متزايده، متناقصه او که ثابته ده؟ ولې؟

د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه دوضعيه کمياتو په سيستم کې رسم او يوله بله سره يې پرتله کړئ.

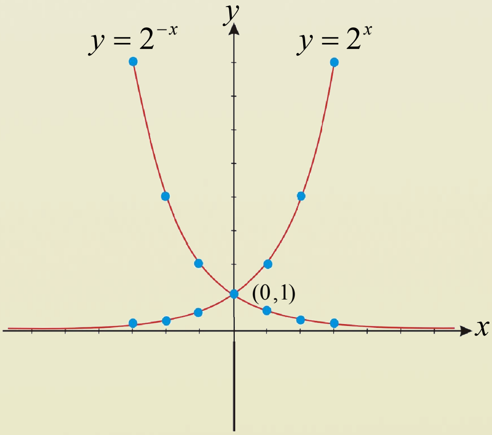
- پورتنی فعاليت د $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ تابع لپاره سرته ورسوئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي.

د $f(x)=2^x$ تابع قيمت د $x\in Z$ ټولو قيمتونو لپاره هميشه مثبت ده

د $y=2^x$ او $y=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه نظر y محور ته متناظر دي، يعنې د $y=2^x$ تابع ګراف هر ټکی د $y=2^{-x}$ تابع ګراف له هر ټکي سره يويه يو متناظر دی.

يادونه: که چېرې په اکسپوننشيل تابع کې $a>1$ وي متزايد، که $a<1$ وي متناقص او که $a=1$ وي ثابته تابع ده.



د $y = 2^x$ او $y = 2^{-x}$ تابع گانو گرافونه رسموو.

د $y = 2^x$ تابع گراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

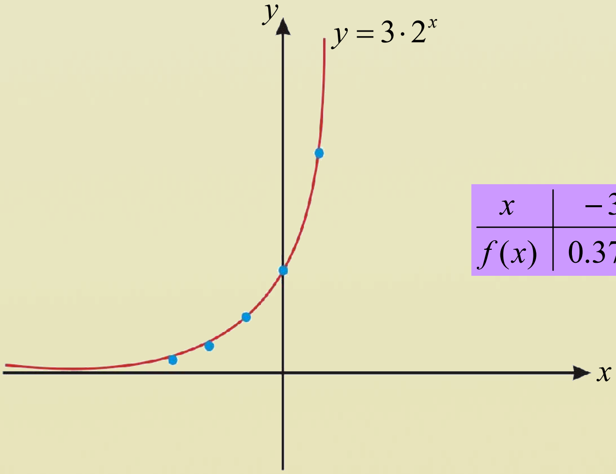
د $y = 2^{-x}$ تابع گراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

مثال: د $f(x) = 3\cdot 2^x$ اکسپوننشیل تابع گراف رسم کړئ

حل: د پایلې په پام کې نیولوسره پوهېږو چې د $f(x) = 3\cdot 2^x$ اکسپوننشیل تابع قاعده $a = 2$ ده، نو په دې اساس پورتنی اکسپوننشیل تابع متزایده ده ،ددې لپاره چې د پورتني اکسپوننشیل تابع گراف دقیق رسم کړو، نو د x متحول ته مختلف قیمتونه ورکوو د y قیمتونه پیدا او په یوه جدول کې یې لیکو، وروسته دغه ټکی (x او y) د قایمو مختصاتو په سیستم کې په نښه کوو.

چې له نښلولو وروسته یې گراف رسم کېږي.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.375	0.750	1.5	3	6	12	24

فعالیت

- د $f(x)=a^x$ اکسپونشیل تابع په پام کې نیولو سره د x او y ټولو حقیقي عددونو لپاره ثبوت کړئ چې:

$$F(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

$$f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a\cdot x)=(f(x))^a$$

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه: له تېرو معلوماتو څخه په ګټې اخیستنې سره د اکسپوننشیل تابع خواص په لانـدې ډول بیانوو

1. د هرې اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
2. هره اکسپوننشیل تابع یوپه یو (injective) ده یعنې د هر

$$x_1=x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

3. هره اکسپوننشیل تابع د $a>1$ لپاره متزایده او د $a<1$ لپاره متناقصه ده.
4. د هرې اکسپوننشیل تابع ګراف د $(0,1)$ له ټکي څخه تیریږي.
5. د $f(x)=a^x$ او $g(x)=a^{-x}$ اکسپوننشیل تابع ګانو ګرافونه نظر y محورته متناظر پراته دي
6. هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوسه تابع یې $Log_a x$ دی.

پوښتني

دلاندې اکسپونشيل تابع گانو گرافونه په قايمو مختصاتوکې رسم کړئ.

$a)\qquad f(x)=2\cdot 3^{x}$

$b)\qquad f(x)=2\cdot 3^{-x}$

$c)\qquad f(x)=(\frac{1}{2})^{x}$

$d)\qquad f(x)=(4)^{-x}$

لـوگاريـتم

Logarithm

آیـا کـولای شـئ چـې اکسپوننـشیل تـابع پـه بـل ډول هـم ولیکئ؟

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

فعالیت

لاندې جدول بشپړکړئ

$y =$ درکړل شوي عددونه	0.0001	0.001	0.01	100	1000	10000
طاقت لرونکي عددونه $= a^x$		10^{-3}				10^4
توان $= x$	-4			2		

- د 10^{-3} طاقت لرونکی عدد قاعده او توان څو دي؟
- آیا دیوه عدد قاعده او توان د 1 عدد کیدلای شي؟
- آیا تاسوکولای شئ چې طاقت لرونکی عدد په بل ډول وښایاست؟

د پورتني جدول له بشپړولو وروسته لاندې تعریف کولای شو، بیان کړو.

تعریف: د طاقت لرونکي عدد یوې بېلې ښوونې تـه لوگـاریتم وایـي، یـا پـه بـل عـبارت د مجهـول تـوان محاسـبه د لوگاریتم په نامه یادیږي .

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

په پورتنی اړیکه کې a ته د لوگاریتم قاعده (Base) او y ته لوگاریتمي عدد وایي، د یوه طاقت لرونکي عدد توان له لوگاریتم څخه عبارت دی ،که د قاعدې په اندازه توان لورشي، راکړل شوی عدد په لاس را کوي.

په تیر جدول کې د 10 د قاعدې توانونه دراکړل شوو عددونو له لوگاریتم څخه عبارت دی.

د مثال په توګه: $\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$

هر مثبت عدد پرته له 1 څخه د لوګاریتم قاعده کیدای شي.

مثال: د لوګاریتم د تعریف په ګټې اخیستې سره لاندې افادې په معادلو(طاقت لرونکو عددي) افادو واړوئ.

$a)\ \log_2 8 = 3$

$b)\ \log_{10} 1000 = 3$

حل:

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = 2^3$

$\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$

پوښتنې

1. لاندې لوګاریتمي اړیکې د هغوی په اړوندو افادو واړوئ.

$a)\quad \log_{10} N = x$

$b)\quad \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

$c)\quad \log_9 81 = 2$

$d)\quad \log_5 5 = 1$

2. لاندې طاقت لرونکی عددونه د لوګاریتم په شکل ولیکئ

$a)\quad 4^3 = 256$

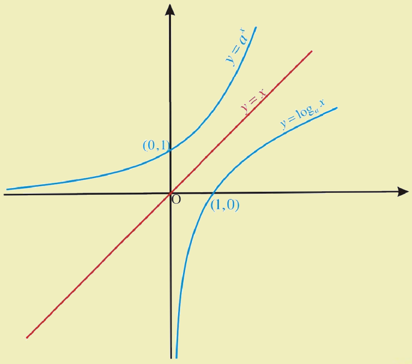
$b)\quad 2^5 = 32$

$c)\quad 10^4 = 10000$

$d)\quad 10^{-1} = 10^y$

$e)\quad y = 2^x$

$f)\quad y = 3^x$



لوګاریتمي تابع ګانې

آیا ویلی شي چې کوم ډول تابع ګانې معکوسې تابعګانې لري؟

آیا ویلی شی هغه تابع ګانې چې معکوسه لري، په قایمو مختصاتو کې نظر کوم مستقیم خط ته متناظرې دي.

تعریف: د اکسپوننشیل تابع معکوسه تابع د لوګاریتمي تابع په نامه یادیږي او هره اکسپوننشیل تابع لوګاریتمي تابع ده.

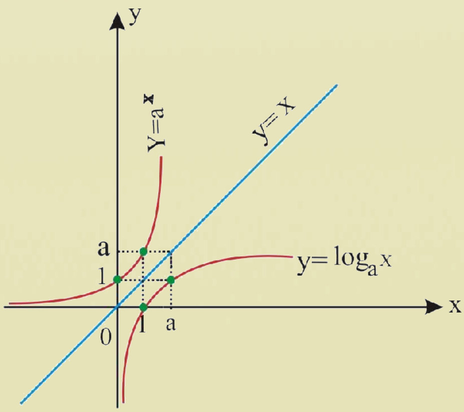
د یوې $(a \in IR^+$ او $a \neq 1)$ اکسپوننشیل تابع، معکوسه تابع د a په قاعده، هغه لوګاریتمي تابع ده چې د $\log_a x$ سره ښودل کیږي.

هره لوګاریتمي تابع، معکوسه تابع لري، د $f(x) = a^x$ او $g(x) = \log_a x$ تابعګانې یو د بل معکوسې تابعګانې او ګرافونه یې د $y = x$ مستقیم ته متناظر دي.

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

$$f^{-1} : IR^+ \to IR \, , f^{-1}(x) = \log_a x, \; a \in IR^+ \, , \; a \neq 1$$

د $f(x) = a^x$ تابع ګراف د $x = 1$ لپاره لاندې شکل لري.



x	0		1		a		$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

له پورتني جدول څخه ليدل کېږي:

که چېرې $a>1$ وي، نود $\forall x_1, x_2 \in IR$ لپاره لرو چې:

که $\log_a x_1 > \log_a x_2$ وي؛ نو $x_1 > x_2$ دی.

د $f(x)=a^x$ تابع ګراف د $x=0$ لپاره $\log_a 1 = 0$ $a^0=1 \Leftrightarrow$

لومړی مثال: د $y=3^x$ او $y=\log_3 x$ تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

حل: د $y=3^x$ تابع په پام کې نیسو:

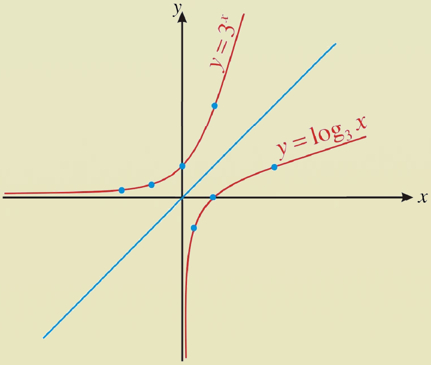
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

اوس $y=\log_3 x$ تابع په پام کې نیسو:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=\log_3 1 \end{array}\right\} (1,0) \qquad \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=\log_3 3 \end{array}\right\} (3,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ y=\log_3 \frac{1}{3} = y = \log_3 3^{-1} = -1 \end{array}\right\} (\frac{1}{3},-1)$$

x	$\frac{1}{3}$	0	1	3
y	-1	1	0	1



فعاليت

د $y=2^x$ او $y=(\frac{1}{2})^x$ اکسپوننشیل تابع ګانو ګراف په پام کې نېولو سره او د اکسپوننشیل تابع ګانو د تعریف له مخې ددوی داړوندو معکوسو لوګاریتمي تابع ګانو قیمتونه د $x=1,2$ لپاره پیدا کړئ او نتیجه یې په عمومي ډول ولیکئ.

پایله: د هرې لوګاریتمي تابع لکه: $y=\log_a x$ د یوې اختیاري قاعدې لپاره لرو.

$\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $a \in IR$, $a > 0$, $a \neq 1$

دويم مثال: که چېرې $f(x) = \log_3 x$ راکړل شوی وي نو $f(1), f(3^{-2}), f(9), f(3)$ په لاس راوړې.

حل: په راکړل شوې تابع کې د x پر ځای قیمتونه ایږدو.

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3) = \log_3 3 = 1$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(9) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3^{-2}) = \log_3 3^{-2} = -2 \cdot \log_3 3 = -2 \cdot 1 = -2$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(1) = \log_3 1 = 0$$

دریم مثال: که $\log_3 x = 4$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: پورتنی لوګاریتم د طاقت په شکل لیکو $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 \Rightarrow x = 81$

د تېرومعلوماتو څخه په ګټې اخیستې سره د لوګاریتمې تابع خاصیتونو په لاندې ډول بیا نیرې.

د لوګاریتمي تابع خاصیتونه:

1. د لوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه د حقیقي عددونو ، له سټ څخه عبارت ده.

2. څرنګه چې $\log_a 1$ د هرې اختیاري قاعدې لپاره مساوي په صفر ده، نو په دې اساس لوګاریتمي تابع یوازې یو جذر $x_0 = 1$ لري چې په ترتیب سره د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتوکې د $(1,0)$ له ټکي څخه تیریږي.

3. هره لوګاریتمي تابع یو په یو یا انجکتیف (injective) ده یعنې دهر $x_1 \neq x_2$ لپاره تل $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.

څلورم مثال:

د $f(x) = \log_2 x$ تابع قیمت د $x = 16, \frac{1}{8}$ لپاره پیدا کړئ.

حل: په راکړل شوې تابع کې د x پرځای قیمتونه وضع کوو چې په پایله کې د تابع قیمت په لاس راځي.

$$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$$

$$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(\frac{1}{8}) = \log_2(\frac{1}{8}) = \log_2 2^{-3} = -3\log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3$$

فعالیت

- د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمت د $x=28,\sqrt{2}$ لپاره په لاس راوړئ.

پوښتنې

1. د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمتونه په $f(32), f(\frac{1}{32}), f(1), f(2)$ کې پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\log_3 x$ تابع قیمتونه په $f(1)$ او $f(\frac{1}{81})$ کې په لاس راوړئ.

معمولي لوګاريتم *Common logarithm*

او طبيعي لوګاريتم *Natural logarithm*

آيا يوازي 2 او 3 د لوګاريتم قاعدي دي، او که نور

عددونه هم د لوګاريتم قاعده کيدلی شي ؟

$$\left.\begin{matrix}\log_e N \\ \log_{10} 10^3\end{matrix}\right\} = ?$$

تعريف

خرنګه چي ومو ليدل، هر مثبت عدد پرته له 1 خخه کيدای شي د لوګاريتم قاعده شي، خويه عمل کي د 10 او e قاعدي معمول او په کار ورل کيږي.

1 – معمولي لوګاريتم: هغه لوګاريتم چي قاعده يې 10 وي، د معمولي لوګاريتم Common logarithm يا (Briggs سيستم) په نامه يادېږي (Briggs) دهغه عالم نوم دی چي دغه سيستم منځ ته راوړی دی

معمولی لوګاريتم د log په سمبول يې ښيي او په لاندی ډول ښودل کيږي.

$$f : IR^+ \longrightarrow IR \ , \ \ f(x) = \log_{10} x = \log x$$

مثال: د $10^{-1}, 10^3, 10^2, 10^1$ او 10^0 عددونو لوګاريتمونه پيدا کړئ.

حل:

$$\log_{10} 10^0 x = \log 10^0 = y \Leftrightarrow 10^y = 1 \Rightarrow 10^y = 10^0 \Rightarrow y = 0$$

$$\log_{10} 10 = \log 10 \ = y \Leftrightarrow 10^y = 10^1 \Rightarrow y = 1$$

$$\log_{10} 10^2 = \log 10^2 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^2 \Rightarrow y = 2$$

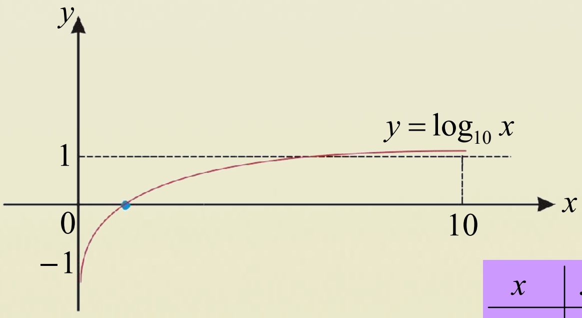
$$\log_{10} 10^3 = \log 10^3 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3$$

$$\log_{10} 10^{-1} = \log 10^{-1} = y \Leftrightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$$

$$\vdots$$

$$n \in z \ , \quad \log_{10} 10^n = \log 10^n = y \Leftrightarrow 10^y = 10^n \Rightarrow y = n$$

د x د مختلفو قیمتونو له مخې یې ګراف رسموو



x	$\dots 10^{-3}$	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}
$\log x$	$\dots -3$	-2	-1	0	1	2	3

2– طبیعی لوګاریتم: هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي د طبیعي لوګاریتم(Natural logarithm) په نامه یادېږي او په ln سره ښوول کېږي، او داسې لیکو: $f: IR^{+} \to IR, F(x)=\log_e x=\ln x$:

e یو غیر ناطق عدد دی چې تقریبي قیمت یې عبارت دی له: $e=2.718281828\cdots$ چې د $(1+\frac{1}{x})^{x}$ لیمت څخه هغه وخت چې x بې نهایت ته نږدې شي په لاس راځي د e قیمت پیداکول د لوړو ریاضیاتو کار دی. د e عدد د اویلر عدد په نامه یادېږي او $f(x)=e^{x}$ تابع د اکسپوننشیل تابع په نوم یادېږي او داسې هم لیکي: $Exp(x)=e^{x}$

د $y=e^{x}$ تابع ګراف لکه: $y=a^{x}$ تابع ګراف په څېر ده.

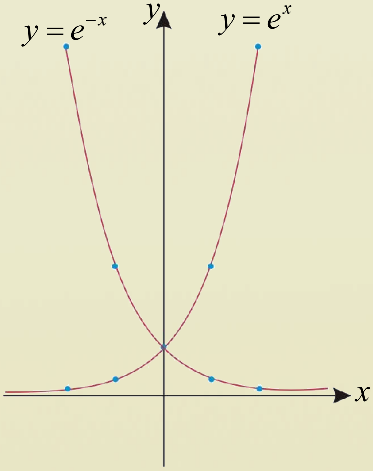
د $y=e^{x}$ په تابع کې x ته مختلف قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{7.3}$	$\frac{1}{2.71}$	1	2.71	7.34

د $y=e^{-x}$ په تابع کې x ته بېلابېل قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	7.34	2.71	1	$\frac{1}{2.7}$	$\frac{1}{7.3}$

د پورتنیو تقریبي قیمتونو په پام کې نیولو سره د $y=e^x$ او $y=e^{-x}$ تابعګانو ګرافونه رسموو:



د طبیعي لوګاریتم مطالعه په لوړو ریاضیاتوکې لکه: ساینس، انجنیري، تجارت او تخنیك کې زیات استعمال لري.

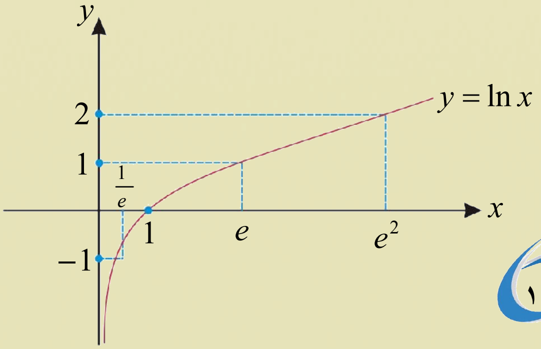
د طبیعي لوګاریتم د تابع $y=\ln x$ ګراف په لاندې ډول دی.

مثال: $\ln e^{-2}, \ln e^{-1}$ $\ln e^0, \ln e^3, \ln e^2$ او $\ln e^1$ پیدا کړئ.

حل: د تعریف په پام کې نیولو سره لرو چې: $y=\ln x=\log_e x$

$$\ln e^1 = y \Leftrightarrow e^y = e^1 \Rightarrow y=1$$
$$\ln e^2 = y \Leftrightarrow e^y = e^2 \Rightarrow y=2$$
$$\ln e^3 = y \Leftrightarrow e^y = e^3 \Rightarrow y=3$$
$$\ln e^0 = y \Leftrightarrow e^y = e^0 \Rightarrow y=0$$
$$\ln e^{-1} = y \Leftrightarrow e^y = e^{-1} \Rightarrow y=-1$$
$$\ln e^{-2} = y \Leftrightarrow e^y = e^{-2} \Rightarrow y=-2$$

د $y=\ln x$ تابع ګراف عبارت دی له:



فعالیت

- د $y = \ln \frac{1}{e^7}$ قیمت پیدا کړی.
- د $\log 0.0001$ قیمت په لاس راوړئ.

پوښتني

لاندي لوګاریتمونه حساب کړئ.

$a) \log_e e^8$

$b) \ln \frac{1}{e^{-3}}$

$c) \log 0.01$

$d) \log \frac{1}{10^{-2}}$

د لوګاریتم قوانین

Low of logarithm

پوهېږي چې د عددونو طاقت خپل قوانین لري، آیا د عددونو لوګاریتم هم قوانین لري او که نه؟

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$$

فعالیت

- د طاقت لرونکو عددونو د ضرب قانون ولیکئ.
- د طاقت لرونکو عددونو د تقسیم قانون ولیکئ.
- هر عدد د صفر او یاد یوه په توان مساوي په څودی؟

د طاقت قوانینو ته ورته لوګاریتم هم ځیني قوانین لري

لومړی قانون: د هر عدد لوګاریتم د لوګاریتم د تعریف په ساحه کې په خپله قاعده مساوي په یو دی؛ مثلاً:

$$a \in IR^+ ,\ a \neq 1, \log_a a = 1$$

ثبوت: پوهیږو چې $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\},\ a^1 = a$ دي، نو $\log_a a = 1$

لومړی مثال: $\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$

دویم قانون: د 1 عدد لوګاریتم په هره اختیاري قاعده مساوي په صفر دی؛ مثلاً: $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\}\ , a^0 = 1$ نو

$$\log_a 1 = 0$$

دویم مثال: $\log_{\sqrt{5}} 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5})^0 = 1$

دریم قانون: د دوو یا څوعددونو د حاصل ضرب لوګاریتم د هغو د لوګاریتمونو له مجموعې سره مساوي دی یعنې:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

ثبوت: که چیرې ولرو.

$x = a^p \ \ldots \ \text{I}$

$y = a^q \ \ldots \ \text{II}$

د I او II اړیکې خوا په خوا ضربوو: $x\cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

د پورتنی اړیکې له دواړو خواوو لوګاریتم نیسو: $\log_a(x\cdot y) = p+q$

د p او q قیمتونو په اېښودلو سره لیکو: $\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$

لومړی مثال: د 50 عدد لوګاریتم په لاس راوړئ.

حل: $\log 50 = \log(5\cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$

دویم مثال: $\log_4 2 + \log_4 8 = ?$

حل:

$$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4(2\cdot 8) = \log_4(2\cdot 2\cdot 4) = \log_4(4\cdot 4)$$
$$= \log_4 4 + \log_4 4 = 1+1 = 2$$

فعالیت

- دلاندې غیر مساواتو سم والی، د مثال په واسطه وښایاست.

$$\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x\cdot y) \neq \log_a x \cdot \log_a y$$

څلورم قانون: د دوو عددونو د تقسیم لوګاریتم د لوګاریتمونو له تفاضل سره مساوی دی، یعنې:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

ثبوت: که چېرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرونو:

$$\left.\begin{array}{l} x = a^p \ldots\ldots\ldots\ I \\ y = a^q \ldots\ldots\ldots\ II \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \log_a x = p \\ \log_a y = q \end{array}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا یو په بل ووېشو.

$$\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

د پورتنی اړیکې له اطراف څخه لوګاریتم نیسو: $\log_a \frac{x}{y} = p - q$

د p او q د قیمتونو په اېښودلو سره لیکو: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

لومړي مثال: د $\log\frac{5}{2}$ محاسبه کړئ داسې چې $\log 2 = 0.3010,\ \log 5 = 0.6900$ وي.

حل: $\log\frac{5}{2} = \log 5 - \log 2 = 0.6900 - 0.3010 = 0.3890$

دویم مثال: $\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy)$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: څلورم قانون له ښي لوري څخه چپ لوري ته تطبیقوو.

$$\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy) = \log_y\frac{10y^2x}{2xy} = \log\ (5y)$$

$$= \log_y(5y) = \log_y y + \log_y 5$$

$$= \log_y 5 + 1$$

پنځم قانون: د یوه توان لرونکي عدد لوګاریتم مساوي دی د توان او د طاقت د قاعدې د لوګاریتم لـه حاصل ضرب سره یعني که چیرې $(a^x)^n$ ولرو نو $\log_a x^n = n\log_a x$ دی.

$$\log_a x^n = \log_a(x \cdot x \cdot x \cdot\ \ldots\ \cdot x)$$

$$\log_a x^n = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \ldots + \log_a x}_{lag_a x \text{ ځلي } n}$$

په پایله کې $\log_a x^n = n\log_a x$

له پنځم قانون څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو ولیکو.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a (x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$$

لومړی مثال: $\log 625 = ?$

حل: $\log 625 = \log 5^4 = 4\log 5 = 4(0.6990) = 2.7960$

دویم مثال: دغه لوګاریتم $\log_3 \sqrt[3]{9}$ پیدا کړئ؟

حل: $\log_3 \sqrt[3]{9} = \log_3 \sqrt[3]{3^2} = \log_3 (3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_3 3 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$

فعالیت

- لاندې لوګاریتمونه پیداکړئ.

$\log_3(0.12) = ?$ $\qquad$ $\log_5 \sqrt{8} = ?$

پوښتنې

1. لاندې ضربي افادې د جمعې د حاصل په شکل او دجمعې د حاصل افادې د حاصل ضرب په شکل ولیکئ او د امکان په صورت کې یې وروستی قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ \log_4(5x^2)=?$

$b)\ \log_{10}(10x^2y)=?$

$c)\ \log_{10}5+\log_{10}20=?$

$d)\ \log_{12}36+\log_{12}4=?$

2. لاندې د خارج قسمت افادې په تفاضل او د تفاضل افادې په خارج قسمت واړوئ، د امکان په صورت کې وروستې ځواب په لاس راوړئ.

$a)\ \log_7\dfrac{63}{49}=?$

$b)\ \log\dfrac{125}{80}=?$

$c)\ \log_a(x^2a)-\log_a x^2=?$

$d)\ \log_{10}1000-\log_{10}100=?$

3. لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$a)\ \log_{10}(0.0001)$ $\qquad$ $b)\ \log_2(8)^{-\frac{1}{3}}$

د لوګاریتم د یوې قاعدې اړول په بله قاعده

که د یوه عدد لوګاریتم په یوه مشخصه قاعده راکړل شـوی وي، ځرنګه کولای شو، نوموړی عدد په بله قاعده واړوو.

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

شپږم قانون: د دوو عددونو د لوګاریتمونو د تقسیم حاصل چه په عین قاعده وي مساوي ده په:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\log_b m = y$ او معادل شکل یې یعنې $m = b^y$ لیکو اوس لـه اطرافو څخه د a پـه قاعده لوګاریتم نیسو:

$$\log_b m = \log_a b^y \Rightarrow \log_b m = y \log_a b$$

اوس د y قیمت په پورتني اړیکه کې اېږدو:

$$\log_a m = \log_b m \cdot \log_a b$$

د پورتنۍ اړیکې دواړه خواوې په $\log_a b$ وېشو:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \frac{\log_b m \cdot \log_a b}{\log_a b} = \log_b m \Rightarrow \frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

لومړی مثال: $\log_9 27$ محاسبه کړئ.

حل: له شپږم قانون څخه په ګټې اخیستنې سره لرو:

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3)^3}{\log_3 (3)^2} = \frac{3\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: $\log_3 75$ حساب کړی.

حل: بیا هم د شپږم قانون په کارولو سره لرو چې:

$$\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (3 \cdot 5^2)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2}{\log_5 3}$$

یادونه: د یوه عدد معکوس لوګاریتم مساوي دی، د هغه عدد له منفي لوګاریتم څخه چې هغه د کو لوګاریتم (co-logarithem) په نامه یاد یږي.

$$\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M = co\log_a M$$

مثال: $\log_2 \frac{1}{32} = ?$

حل: $$\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 1 - \log_2 32 = \log_2 1 - \log_2 2^5 = 0 - 5\log_2 2 = -5\cdot 1 = -5$$

اووم قانون: د یوه عدد معکوس لوګاریتم مساوي دی په: $$\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\frac{1}{\log_M a} = x$ نیسو: $$\frac{1}{\log_M a} = x \Rightarrow x\log_M a = 1 \Rightarrow \log_M a^x = 1 \ldots I$$

د I په رابطه کې د1 عدد په ځای لیکلی شو چې $$1 = \log_M M$$

$$\log_M a^x = \log_M M \Rightarrow \log a^x = \log M$$

اوس د دواړو خواوو لوګاریتم نیسو یعنې $\log_a M = x$

په پورتنی اړیکه کې د x په ځای قیمت اېږدو: $$\log_a M = x = \frac{1}{\log_M a}$$

مثال $\log_{125}\sqrt{5} = ?$

حل: $$\log_{125}\sqrt{5} = \log_{125}(5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{125} 5 = \frac{1}{2\log_5 125} = \frac{1}{2\log_5 5^3} = \frac{1}{6\log_5 5} = \frac{1}{6}$$

فعالیت

لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$$\log_{64} 2 = ? \qquad \log_4 \sqrt{25^6} = ?$$

اتم قانون: دیوه عدد لوګاریتم په توان لرونکې قاعده مساوي دی په $$\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\log_a x = m$ نیسو او هغه داړوند طاقت په شکل لیکو:

$$\log_a x = m \Rightarrow x = a^m \Rightarrow x = (a^m)^{\frac{n}{n}} \Rightarrow x = (a^n)^{\frac{m}{n}}$$

د پورتنی رابطې د دواړو خواوو څخه لوګاریتم نیسو: $$\log_{a^n} x = \frac{m}{n} \Rightarrow \log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a m$$

اوس د m په ځای قیمت ایږدو:

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$$

له پورتني قانون څخه لاندې پايلې په لاس راځي

$$1)\ \log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x \qquad 2)\ \log_{\frac{1}{n}} \frac{1}{x} = \log_n x \qquad 3)\ \log_{a^n} x^n = \log_a x$$

لومړی مثال: $\log_{25} 125 = ?$

حل:

$$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2}\log_5 5 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

دويم مثال: $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = ?$

حل:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = \log_{\frac{1}{(3)^{\frac{1}{3}}}} (3^3)^2 = \log_{3^{-\frac{1}{3}}} (3)^6 = \frac{6}{-\frac{1}{3}}\log_3 3 = \frac{6}{1}(\frac{3}{-1})\cdot 1 = -18$$

فعالیت

د پورتنيو خاصيتونو په کارولو سره لاندې لوګاريتمونه ساده کړئ.

a) مخامخ لوګاريتم په معکوس ډول وليکئ. $\log_3 6 = ?$

b) $\log_8 \sqrt[3]{4} = ?$

د معمولي او طبيعي لوګاريتمونو ترمنځ اړيکه: د دغو دوو لوګاريتمونو يعنې د 10 او e عددونه د $\log_a x = \log_b x . \log_a b$ له اړيکې څخه په ګټې اخيستنې چې a, b او x مثبت عددونه او a او b د 1 خلاف دي:

که چېرې $a = e$ او $b = 10$ وضع شي، نو لرو چې:

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

$$\log_e x = \log_{10} x \cdot \log_e 10$$

پوهېږو چې $\log_e x = \ln x$ دی، نو:

$$\ln x = \log_e 10 \cdot \log x$$

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

که چېرې $b = e$ او $a = 10$ وضع شي، نو:

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$$

$$\log_{10} x = \log x = \log_e x \cdot \log_{10} e$$

$$\log x = \log_{10} e \cdot \ln x$$

ځرنگه چې $\log_{10} e = 0.4343$ دی، نو لاندې اړیکه لرو:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

لومړی مثال: د $\ln 4.69$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot \log 4.69$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot 0.6712 = 1.5455$$

دویم مثال: د $\log 6.73$ قیمت پیدا کړئ په داسې حال کې چې $\ln 6.73 = 1.9066$ وي.

حل: د تېرې اړیکې په ګټې اخیستې سره لرو چې:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

$$\log 6.73 = 0.4343 \cdot \ln 6.73$$

$$= 0.4343 \cdot 1.9066 = 0.8280$$

پوښتنې

لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

$a)\ \log_{\frac{1}{3}} 3^{-4} = ?$ $\qquad b)\ \log_9 27 = ?$

$c)\ \log_8 4 = ?$ $\qquad d)\ \log_{121} 14641 = ?$

$e)\ \ln 672000$ $\qquad f)\ \ln 0.00927$

$g)\ \ln 0.235$

کرکټرستیک او مانتیس

Characteristic and Mantissa

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\} = ?$$

پوهېږو چې:

$\log_{10} 1000 = 3 \ , \ \log_{10} 100 = 2 \ , \ \log_{10} 1 = 0$

دی. آیا دیوه عدد د ارقامو دشمېر او لوګاریتم ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟

تعریف

پوهېږو چې د x هر حقیقي مثبت عدد د $x = S \cdot 10^n$ په شکل لیکل کیدای شي، داسې چې $1 \le S < 10$ او n یو تام عدد وي.

که چېرې د x لوګاریتم غوښتل شوی وي، په لاندې ډول یې پیدا کولای شو.

$$\log x = \log(S \cdot 10^n) = \log S + \log 10^n = \log S + n \log 10 = \log S + n$$

د $\log S$ په هغه صورت کې چې $1 \le S < 10$ وي، S د x د لوګاریتم مانتیس یا اعشاري برخه او n چې یو تام عدد دی، د x د لوګاریتم مشخصه یا کرکټرستیک څخه عبارت دی. څرنګه چې $1 \le S < 10$ دي نو.

$$\log 1 \le \log S < \log 10$$
$$0 \le \log S < 1$$

له پورتنۍ اړیکې څخه داپایله په لاس راځي چې دیوه عدد (له ۱۰ کوچنی او له یوه لوی یا مساوي) لوګاریتمې یې د یو او صفر ترمنځ قرار لري.

فعالیت

- لاندې جدول بشپړکړئ.

د عددونو توان لرونکی شکل	$0.001 = 10^{-3}$	$0.01 = 10^{-2}$	$1 = 10^{0}$	$1000 = 10^{3}$	$4 = 10^{0.602}$	$7 = 10^{0.845}$	$10 = 10^{1}$	$20 = 10^{1.390}$
د عددونو لوګاریتمي شکل	$\log_{10} 0.001$		$\log_{10} 1$			$\log_{10} 7$		$\log_{10} 20$
لوګاریتم	-3	-2		3	0.602		1	

د هغو عددونو لوګاریتمونه چې د 0، 10، 100 ,1000، 0.01 د 0.001 عددونو ترمنځ واقع دي، مساوي له څوسره دي؟

- آیا هر څومره چې عدد لوی شي لوګاریتم یې هم لوئیږي؟
- له 1 څخه د کوچنیو عددونو د لوګاریتم علامه منفي ده، که مثبت؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

- که چېرې $1 \le x < 10$ سره وي، کرکټرستیک یې صفر دی.
- که چېرې $10 \le x < 100$ وي کرکټرستیک یې مساوي له 1 سره دی.
- که چېرې $100 \le x < 1000$ وي، نو کرکټرستیک یې 2 دی.

دیوه عدد په لوګاریتم کې صحیح برخه کرکټرستیک او اعشاري برخه یې مانتیس نومېږي.

هغه وخت چې عدد د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکل شي، د 10 د عدد توان له کرکټرستیک څخه عبارت دی.

د عدد لیکنې علمي طریقه Scientific notation

کولای شو هر عدد د 10 د توان په څېر ولیکو، لکه: د N عدد داسې لیکو $N = a \cdot 10^n$ چې په دې حالت کې $1 \le a < 10$ او n یو تام عدد دی

لومړی مثال: لاندې عددونه د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکئ.

$a)$ 2573 $b)$ 573216 $c)$ 0.0028

حل :

$a) \quad 2573 = 2.373 \cdot 10^3$

$b) \quad 573216 = 5.73216 \cdot 10^5$

$c) \quad 0.0028 = \dfrac{28}{10000} = \dfrac{28}{10^4} = 28 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10^{-3}$

قاعده: که چېرې دیوه عدد صحیح برخه چې د صفر خلاف وي، نود هغه عدد دلوګاریتم کرکټرستیک مساوي دی، د صحیح برخې د ارقامو په شمېر، منفي یو.

دویم مثال: د $\log 526.9$ کرکټرسټیک مساوي له څو سره دی؟

حل: د صحیح ارقامو شمېرله 3 سره برابر دی، نو کرکټرسټیک يې $3-1=2$ دی.

او له یوه څخه د کوچنیو عددونو کرکټرسټیک منفي علامه لري او قیمت يې د اعشاري د علامې د ښي خوا د صفرونو له شمېر څخه، د یوه په اندازه زیات دی.

دریم مثال: د $\log 0.002$ کرکټرسټیک مساوي په څو دی؟

حل:

$$\begin{aligned}\log 0.002 &= \log(2\cdot 10^{-3})\\ &= \log 2 + \log 10^{-3}\\ &= \log 2 - 3\log 10 = \log 2 - 3\end{aligned}$$

نو کرکټرسټیک يې -3 دی.

له تېرو دوو مثالونو څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د لاندې عددونو کرکټرسټیک په لاس راوړو.

لوګاریتمونه		کرکټرسټیک
$\log 89435$	$5-1$	4
$\log 56.784$	$2-1$	1
$\log 0.995$	$0-1$	-1
$\log 0.0789$	$-1-1$	-2

پوښتني

دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول ووایاست؟

$a)\ \log 0.9560$ $b)\ \log 956.0$

$d)\ \log 2345$ $e)\ \log 3.875$

$c)\ \log 9560$ $f)\ \log 0.0009560$

د لوګاریتم جدول

څرنګه چې په تېرلوست کې مو ولوستل چې د یوه عدد لوګاریتم له دوو برخو(کرکټرستیک او مانتیس) څخه تشکیل شوی دی. د مانتیس د پیدا کولو لپاره په څه ډول عمل کوئ.

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\}=?$$

د مانتیس د پیدا کولو طریقه:

پوهېږو چې هر لوګاریتمي عدد له دوو یعنې صحیح او اعشاري برخوڅخه جوړ شوی دی، څرنګه چې صحیح برخه یا مشخصه د خپل عدد د ارقامو له مخې او مانتیس یې د لوګاریتمي جدول له مخې چې مخکې ترتیب شوی ټاکل کېږي، دغه جدول یې تر څینې 7 ، تر 5 او څینې یې تر 4 او 3 اعشاري خانو پورې ترتیب شوی چې د مانتیس د پیدا کولو لپاره ترې کار اخلي چې د اعشاري د تامو عددونو د ارقامو د شمېر په پام کې نیولو سره جدولونه نومول شوی دي. لکه: 7 رقمي جدولونه 5، رقمي جدولونه او داسې نور.

د یوه عدد د مانتیس د پیدا کولو لپاره د نوموړي عدد ارقام له چپ لوري څخه په پام کې نیول کېږي په دې ډول چې ښي لوری دیوه رقم په استثنا هغه د جدول په داسې ستون کې لټوو چې د ښۍ خواله رقم سره مطابقت ولري، نو هغه اعشاري عدد چې د سطر او ستون تقاطع وي، له مانتیس څخه عبارت دی.

لومړی مثال:

حل:

$$\log 765=?$$

$$\log 765=\log(7.65\cdot 10^{2})$$

$$=\log 7.65+\log 10^{2}$$

$$=\log 7.65+2$$

مانتیس ← $\log 7.65$ ، کرکټرستیک ← 2

د 2 عدد د کرکټرستیک څخه عبارت دی او دمانتیس د پیدا کولو لپاره یعنې $\log 7.65$ په 76 سطر او 5 - ام ستون کې ګورو چې د 8837 عدد سره مطابقت کوي یعنې د نوموړي عدد مانتیس 0.8837 دی چې په حقیقت کې د 765 عدد مانتیس دی.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
74										
75										
76	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
77										
78										
79										

$$\log 765 = \log 7.65 + 2 = 0.8837 + 2 = 2.8837$$

دويم مثال: $\log 70.9$ په لاس راوړی؟

حل:

$$\log 70.9 = \log(7.09 \cdot 10)$$
$$= \log 7.09 + \log 10^1$$
$$= \log 7.09 + 1$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70 ⋮ 79 ⋮	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	**8506**

د 709 عدد د 9 ستون لاندي لټوو چې له 8506 عدد سره مطابقت کوي يعني د 7.09 عدد مانتيس 0.8506 دی، په پايله کې يې لوګاريتم داسې حسابوو:

$$\log 70.9 = 0.8506 + 1 = 1.8506$$

دريم مثال: د 0.0247 لوګاريتم حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\log 0.0247 = \log(2.47 \cdot 10^{-2})$$
$$= \log 2.47 + \log 10^{-2}$$
$$= \log 2.47 - 2$$

د 2.47 عدد په 24 – ام سطر او 7 – ام ستون لاندې لټوو چې له 3927 عدد سره مطابقت کوي يعنې د 2.47 عدد مانتيس عبارت دی له: 0.3927 په پايله کې د لوګاريتم حاصل داسې په لاس راوړو:

$$\log 0.0247 = \log 2.24 - 2 = 0.3927 - 2 = \overline{2}.3927$$

يادونه: څرنګه چې مانتيس هميشه مثبت دی، که کرکټرستيک منفي وي او وغواړو دواړه د يوه مثبت عدد په شکل وليکو، نو منفي علامه د کرکټرستيک له پاسه ليکو، مثلاً په پورتني مثال کې:

$$0.3927 - 2 = \overline{2}3927$$

فعاليت

- د لوګاريتم د جدول په پام کې نيولو سره 9280 عدد لوګاريتم حساب کړئ.

څلورم مثال: د لاندې جدول په پام کې نيولوسره د 15 , 105, 900 , $\frac{3}{4}$, 0.007 عددونو لوګاريتمونه پيدا کړئ.

عددونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لوګاريتمونه	0.0000	0.30103	0.47712	0.60206	0.69897	0.77815	0.84570	0.90309	0.95424	1.0000

$$\log 15 = (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0.47712 + 0.69897 = 1.17609$$

$$\begin{aligned}\log(105) &= \log(5 \cdot 3 \cdot 7) = \log 5 + \log 3 + \log 7 \\ &= 0.69897 + 0.47712 + 0.84570 \\ &= 2.02079\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(900) &= \log(9 \cdot 10^2) = \log 9 + \log 10^2 \\ &= 0.95424 + 2 \\ &= 2.95424\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(\frac{3}{4}) &= \log 3 - \log 4 = 0.47712 - 0.60206 \\ &= -0.12486\end{aligned}$$

$$\log(0.007) = \log(7 \cdot 10^{-3}) = \log 7 + \log 10^{-3} = \overline{3}.84570$$

پوښتني

1. دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول ووایاست او مانتیس یې د جدول له مخې پیدا کړئ.

$a)\ \log 222$ $\qquad b)\ \log 0.921$

$c)\ \log 928$ $\qquad d)\ \log 527$

$e)\ \log 0.024$ $\qquad f)\ \log 2400$

$h)\ \log 0.00024$ $\qquad j)\ \log 24$

2. د لاندې لوګاریتمونو قیمتونه په لاس راوړئ.

$a)\quad \log(2.73)^3$ $\qquad b)\quad \log \sqrt[5]{0.0762}$

انتي لوګاریتم

Anti Logarithm

که چیرې د یوه عدد لوګاریتم راکړل شوی وي څرنګه کولای شو، عدد یې پیدا کړو؟

$\log 481 = 2.6821$

$\log N = 1.6580$

$N = ?$

تعریف: که چېرې $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاریتم انتي لوګاریتم بلل کېږي یعنې $y = anti\log x$

مثلاً که چېرې $\log 34 = 1.5315$ وي، نود 1.5315 انتي لوګاریتم د 34 له عدد سره مساوي دی.

فعالیت

- که چېرې $\log N = 2.8779$ وي، نو د N عدد و ټاکئ.
- د نومورې عدد کرکټرسټیک پیدا کړئ.
- د مانتیس په جدول کې د 0.8779 عدد له کوم سطر او ستون سره مطابقت لري؟

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

څرنګه چې د 2 عدد کرکټرسټیک دی، نو N یو درې رقمي عدد دی، مانتیس یې په جدول کې له 75 سطر او 5 ستون سره مطابقت لري، نود N عدد عبارت دی له: 755

لومړی مثال: $\log N = 2.9939$ دی د N عدد په لاس راوړئ.

حل: د نومورې لوګاریتم د مانتیس برخه یعنې 0.9939 د لوګاریتم په جدول کې پیدا کوو، ګورو چې په کوم سطر او ستون کې ځای لري. دغه د سطر او ستون عدد داسې لیکو چې د ستون عدد داړوند سطر ښي لوری ته قرار ولري چې عبارت دی له 9.86 څخه یعنې د 986 عدد مانتیس 0.9939 دی. په پورتني پوښتنه کې د 2 د کرکټرسټیک په توګه راکړل شوی، نو د صحیح رقمونو شمېر یې 3 دی، چې مطلوب عدد عبارت دی له 986 یعنې: $N = 986$

$\log 986 = 2.9939$

$anti\log 2.9939 = 986$

9.5 9.6 9.7 9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939 ↑	0.9943	0.9948	0.9952
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

دويم مثال: که چېرې $\log N = 0.9791$ وي N په لاس راوړئ.

حل: دلته هم د 9791 عدد په جدول کې پيدا کوو، د سطر او ستون اړوند عددونه لکه: د تېر په څير ليکو، څرنگه چې 953 مانتيس ښيي چې د مطلوب عدد 953 رقمونه دي څرنگه چې کرکټرسټيک صفر دی، نو مطلوب عدد يعنې N يو صحيح رقم لري چې عبارت دی له:

$$N = 9.53$$

$$\log 9.53 = 0.9791$$

$$anti\log 0.9791 = 9.53$$

دريم مثال: $\log N = -3.0531$ دی، د N عدد پيدا کړئ.

په مثال کی ليدل کېږی چې کرکټرسټيک او مانتيس دواړه منفي دی او په جدول کې منفي عدد وجود نه لری، ددې لپاره چې مانتيس مثبت شي، د 1 عدد له مانتيس سره جمع او له کرکټرسټيک څخه يې کموو، په مساواتو کې تغيرنه راځي.

اوس کولای شو د مانتيس 0.9469 په مرسته د N عدد له جدول څخه پيدا کړو، چې عبارت دی له 886 .

کرکټرسټيک ښيي چې د اعشاري د علامې او له چپې خوا څخه د لومړي 8 عدد تر منځ درې صفرونه ځای لري

$N = 0.000885$ نو $anti\log -3.05531 = 0.000885$

څلورم مثال: دلاندې عددونو لوگاريتمونه محاسبه کړئ.

$a)\ 2$ $\quad b)\ 0.2$ $\quad c)\ 0.02$ $\quad d)\ 0.0002$

حل:

$$a)\ \log 2 = 0.3010$$

$$b)\ \log 0.2 = 0.3010 - 1 = \overline{1}.3010$$

$$c)\ \log 0.02 = 0.3010 - 2 = \overline{2}.3010$$

$$d)\ \log 0.0002 = 0.3010 - 4 = \overline{4}.3010$$

له پورتني مثال څخه دا پايله په لاس راځي چې ديوه عدد د لوگاريتم مانتيس يوازې د رقمونو په ترتيب پورې اړه لري په پورتني مثال کې ټول عددونه يو شان مانتيس 0.3010 لري، ښي او يا چپ لوري ته د صفرونو زياتول په مانتيس باندې کومه اغيزه نه لري.

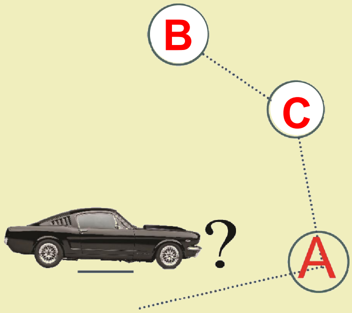
پوښتنې

دلاندې هر يوه انتي لوگاريتم قيمت په لاس راوړئ.

$a)\ anti\log 4.9479$ $\qquad b)\ anti\log -5.0521$

خطي انټرپولېشن

Linear Interpolation



یوګړندی موټر په متوسط سرعت په 30 دقیقوکې د A ښارته او یونیم ساعت وروسته په همدغه سرعت د B ښارته رسېږي، وواياست چې په همدې ثابت سرعت به نوموړی موټر د C ښار ته چې د A او B ښارونو تر منځ پروت دی، په څومره وخت کې ورسېږي.

فعالیت

- که چېرې $\log B = b, \log A = a$ راکړل شوی وي او $\log C = c$ وي، په داسې حال کې چې $A < C < B$ دی.
- $\log C$ د حقیقي عددونو په کومه فاصله کې ځای لري.
- په اټکلي ډول وواياست چې که (a , b) یوبل ته نژدې عددونه وي، نو د C لوګاریتم چېرې پروت دی؟
- د a او b تر منځ قیمتونه د حسابي وسط له مخې په لاس راوړئ.

پایله: که چېرې دیوه نامعلوم قیمت د پیداکولو لپاره چې ددوو معلومو عددونو تر منځ پروت وي، د معلوموعددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، په دې صورت کې نوموړې طریقه د خطي انټرپولېشن په نامه یادېږي.

که یو څلور رقمي عددلکه: 1.234 ولرو، نه شوکولای د هغه لوګاریتم له درې رقمي جدول څخه په لاس راوړو، نو د دې ډول عددونو لوګاریتم د خطي انټرپولېشن په واسطه پیداکولای شو.

لومړی مثال: د $\log 5.235$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: ښکاره ده چې دنوموړي عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، خو د 5.230 او 5.240 عددونوپه منځ کې پراته دي چې لوګاریتمونه يې په جدول کې شته، او په لاندې ډول یې په لاس راوړو.

$$\log 5.230 = 0.7185$$
$$\log 5.240 = 0.7193$$

څرنګه چې $5.23 < 5.235 < 5.24$ دی، نو:

$$\log 5.230 < \log 5.235 < \log 5.240$$
$$0.7185 < \log 5.235 < 0.7193$$

که چېرې $\log 5.535 = x$ په پام کې ونیسو ، نو په دې صورت کې لیکو چې: $0.7185 < x < 0.7193$

د عددونو د لوګاریتم او مانتیسو نو ترمنځ تو پیر په پام کې نیسو.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{عددونه} & \text{لوګاریتمونه} & \\ 0.010 \text{ د عددونو توپیر} & \left[\begin{array}{l} \\ 0.005 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 5.240 \\ \left[\begin{array}{c} 5.235 \\ 5.230 \end{array}\right. \end{array} & \begin{array}{c} 0.7193 \\ \left.\begin{array}{c} x \\ 0.7185 \end{array}\right] d \end{array} & \left.\right] 0.0008 \text{ د لوګاریتمونو توپیر} \end{array}$$

د خطي انټرپولیشن په طریقه کې له دې څلورو عددونو څخه یو تناسب چې یو له بل سره متناسب دي جوړوو او نامعلوم قیمت پیدا کوو یعنې:

$$\frac{d}{0.0008}=\frac{0.005}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.005\cdot 0.0008}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.000004}{0.010}=0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عددله مانتیس سره جمع کوو. چې حاصل یې د مطلوب عدد لوګاریتم دی.

$$0.0004+0.7185=0.7189$$

$$\log 5.235=0.7189$$

دویم مثال:د 0.0007957 عدد لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\begin{aligned}\log 0.0007957 &= \log(7.957\cdot 10^{-4}) \\ &= \log 7.957+\log 10^{-4} \\ &= \log 7.957-4\log 10 \\ &= \log 7.957-4\end{aligned}$$

د 7.957 عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، لیدل کېږي چې کرکټرستیک یې -4 دی، خو د 7.96 او 7.95 عددونو لوګاریتم په جدول کې شته.

$$\log 7.960=0.9009$$

$$\log 7.950=0.9004$$

څرنګه چې $7.950<7.957<7.960$ نو:

$$\log 7.950<\log 7.957<\log 7.960$$

د $\log 7.957 = x$ په پام کې نیولو سره، دخطي انټرپولیشن پواسطه یې لوګاریتم په لاس راوړو.

$$\begin{array}{r} \text{د عددونو توپیر } 0.01 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{lcc} & \text{عددونه} & \text{لوګاریتمونه} \\ & 7.96 & 0.9009 \\ 0.007 & \left[\begin{array}{l} 7.957 \\ 7.950 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{r} x \\ 0.9004 \end{array}\right] d \end{array}\right] 0.0005 \text{ د لوګاریتمونو توپیر}$$

$$\frac{d}{0.0005} = \frac{0.007}{0.01} \Rightarrow$$

$$d = 0.0005 \frac{0.007}{0.01} = 0.00035 \approx 0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کوو: $0.9004 + 0.0004 = 0.9008$

په پای کې په لاس راځي چې:

$$\log 0.0007957 = 0.9008 + (-4) = \bar{4}.9008$$

دریم مثال: 4.5544 عدد انتي لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: که چېرې $x = anti \log 4.5544$ وضع شي، نو باید x پیداکړو، له پورتنی اړیکې څخه داسې پایله په لاس راځي.

$$\log x = 4.5544 = 4 + 0.5544$$

$$\log x = \log(t \cdot 10^4) = \log t + 4$$

د 4.5544 عدد په جدول کې نشته، خو د 0.5539 او 0.5551 عددونه په جدول کې شته، انتي‌لوګاریتم یې پیدا کوو، ددغه عددونو په مرسته د x قیمت د انټرپولیشن په طریقه پیدا کوو، د عددونو تفاضل لکه: په تېرو مثالونوکې په لاس راوړو او تناسب یې د تېرپه شان تشکیلوو.

$$\begin{array}{r} \text{د عددونو توپیر } 0.01 \end{array}\left[\begin{array}{lcc} & \text{عددونه} & \text{مانتیسونه} \\ & 3.59 & 0.5551 \\ d & \left[\begin{array}{l} t \\ 3.58 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{r} 0.5544 \\ 0.5539 \end{array}\right] 0.0005 \end{array}\right] 0.0012 \text{ د مانتیسونو توپیر}$$

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0005}{0.0012}$$

$$d = 0.01 \cdot \frac{0.0005}{0.0012} = \frac{0.000005}{0.0012} = 0.0041667$$

$$d = 0.0042$$

د t د قیمت پیداکولو لپاره د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو.

$t = 3.58 + d = 3.58 + 0.0042$

$= 3.5842$

$\log x = \log(3.5842 \cdot 10^4)$

$\log x = \log 35842$

هغه وخت چې ددوو عددونو لوګاریتمونه سره مساوي وي، خپله عددونه په خپل منځ کې سره مساوي دي، نو:

$x = 35842$

پوښتنې

په لاندې اړیکو کې د x او z قیمتونه پیدا کړئ.

$a)\quad z = \log 0.001582$ $\qquad$ $b)\quad x = \log 6.289$

لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلې

Exponential and logarithmic equations

$$\log_2(x^2-1)=3$$

$$5^x=5^{\frac{1}{2}x-2}$$

آیا تر اوسه مود $\log_2(x^2-1)=3$ او $5^x=5^{\frac{1}{2}x-2}$ معادلو د

حل په اړه فکر کړی دی؟

د x په کومو قیمتونو پورتني مساوات سم دی؟

څرنګه کولای شو په دغه ډول معادلاتو کې د x مجهول قیمت وټاکو.

تعریف

هغه معادلې چې توانونه یې مجهول وي، داکسپوننشیل معادلو په نامه یادېږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره که چېرې وکړای شو، د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کړو، نو د طاقت د قوانینو له مخې، چې قاعدې مساوي وي، نو توانونه یې هم یو له بل سره مساوي دي.

لومړی مثال: که $2^{x-1}=32$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د مساواتو د دواړو خوا وو قاعدې سره مساوي کوو.

$$2^{x-1}=32\Rightarrow 2^{x-1}=2^5\Rightarrow x-1=5\quad,\quad x=6$$

دویم مثال: د $8^{3x-1}=2^4$ اکسپوننشیل معادله حل او وازمویئ.

حل:

$$8^{3x-1}=2^4$$

$$(2^3)^{3x-1}=2^{3(3x-1)}=2^4$$

څرنګه چې قاعدې یو له بل سره مساوی دي، نو توانونه یې هم مساوی دي؛ نو لیکو:

$$3(3x-1)=4$$

$$9x-3=4\Rightarrow 9x=4+3$$

$$9x=7\Rightarrow x=\frac{7}{9}$$

آزمونه:

$$8^{3\frac{7}{9}-1}=2^4$$

$$8^{\frac{7}{3}-1}=2^4$$

$$8^{\frac{7-3}{3}}=2^4 \;\Rightarrow\; 8^{\frac{4}{3}}=2^4 \;\Rightarrow\; (2^3)^{\frac{4}{3}}=2^4 \;\Rightarrow\; 2^4=2^4$$

فعالیت

- په $16^{x+1}=64^{x-2}$ اکسپوننشیل معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

لوګاریتمي معادلې:

هغه لوګاریتمي افادې چې په هغوی کې متحول او یا مجهول شتون ولري، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادیږی. له یوې لوګاریتمي معادلې څخه د مجهول قیمت پیداکولو لپاره لومړی معادله د لوګاریتم د قوانینو له مخې ساده کوو، وروسته یې د الجبري قوانینو او یا له اکسپوننشیل معادلو څخه په ګټې اخیستنې سره د مجهول یا متحول قیمت په لاس راوړو.

لاندې مثالونه د لوګاریتمي معادلو بېلګې دي چې د مختلفو قوانینو له مخې د مجهول قیمت محاسبه شوی دی.

لومړی مثال: له لاندې لوګاریتمي معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.

حل:

$$\log_2(x^2-1)=3$$

پورته لوګاریتمي شکل داسې لیکو :

$$x^2-1=2^3$$

$$x^2=1+8=9$$

$$x^2=9 \Rightarrow \sqrt{x^2}=\pm\sqrt{9} \quad , \qquad x=\pm3$$

دويم مثال:په $\log_3(x+2) = 2\log_3 9$ معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$\log_3(x+2) = 2\log_3 9$$

$$\log_3(x+2) = \log_3 9^2$$

څرنګه چې د لوګاریتمونو قاعدې سره مساوي دي، نوعددونه هم یوله بل سره مساوي دي.

$$x+2 = 9^2 \Rightarrow x+2 = 81 \Rightarrow x = 81-2$$

$$x = 79$$

دریم مثال: په $\log_{\sqrt{5}} x - \log_{\sqrt{5}} 3 - \log_{\sqrt{5}} 5 + \log_{\sqrt{5}} 4 = 0$ لوګاریتمي معادله کې د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د دوو عددونو د لوګاریتم د ضرب او وېش په کارولو سره پورتنی معادله په لاندې ډول لیکو :

$$\log_{\sqrt{5}} x = \log_{\sqrt{5}} 3 + \log_{\sqrt{5}} 5 - \log_{\sqrt{5}} 4 = \log_{\sqrt{5}} \frac{3\cdot 5}{4} = \log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{15}{4}$$

څلورم مثال: په $\log_3(3^{2x}+2) = x+1$ معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

حل:

$$\log_3(3^{2x}+2) = x+1 \Rightarrow 3^{2x}+2 = 3^{x+1}$$

$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0 \Rightarrow 3^{2x} - 3\cdot 3^x + 2 = 0$$

$$(3^x)^2 - 3\cdot 3^x + 2 = 0$$

که $3^x = t$ وضع کړو،نو:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0$$

$$t_1 = 1 \quad , \quad t_2 = 2$$

$$3^x = t_1 = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$3^x = t_2 = 2 \Rightarrow \log_3 2 = x \Rightarrow x_2 = \log_3 2$$

پنځم مثال:په لاندې لوګاریتمي معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

$$\log(x^2+36) - 2\log(-x) = 1$$

حل:

$$\log(x^2+36)-\log(-x)^2=1$$

$$\log\frac{x^2+36}{x^2}=\log 10 \Rightarrow \frac{x^2+36}{x^2}=10$$

$$x^2+36=10x^2 \Rightarrow 10x^2-x^2-36=0$$

$$9x^2=36 \Rightarrow x^2=4$$

$$x_{1,2}=\pm 2 \quad , \quad x_1=2 \quad , \quad x_2=-2$$

پوښتنې

په لاندې لوگاریتمي او اکسپوننشیل معادلوکې د x قیمت په لاس راوړئ.

$a)\quad (11)^{3x-1}=11$

$b)\quad 7^{2x-1}=3^{x+3}$

$c)\quad \log\sqrt{x}+3=4$

$d)\quad \log_5\frac{x-1}{x-2}=2$

درياضيکی عمليوپه سرته رسولوکې له لوګاريتم څخه کار اخېستنه

آيا کولای شو د اعشاری عددونو عمليې لکه ضرب، تقسيم، توان او جذر د لوګاريتم په کارولو سره په اسانه سرته ورسوو.

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{28.8}{78.8} \\ 3.17\cdot 88.2 \end{matrix}\right\} = ?$$

د ضرب حاصل پيدا کول د لوګاريتم په مرسته: کولای شو دووو يا څو عددونو د ضرب حاصل، د لوګاريتم د لاندې قانون له مخې پيدا کړو: $\log(M\cdot N)=\log M+\log N$

مثال: غواړو چې د $3.17\cdot 88.2$ عددونو د ضرب حاصل د لوګاريتم په مرسته پيدا کړو.

حل: د ضرب د قانون په اساس ليکلای شو:

$$\log(3.17\cdot 88.2)=\log 3.17+\log 88.2$$
$$=0.5011+1.9455=2.4466$$

ليدل کېږي چې د 0.4466 مانتيس عدد په جدول کې نشته، خود 0.4456 او 0.4472 مانتيسونو په منځ کې شته.

له جدول څخه ليدل کېږي چې:

$$anti\log 0.4456=2.79$$
$$anti\log 0.4472=2.80$$

	عددونه	مانتيسونه		
د عددونو توپير 0.01	2.79	0.4456		د مانتيسونو توپير 0.0016
d	t	0.4466	0.0006	
	2.80	0.4472		

$$\frac{d}{0.01}=\frac{0.0006}{0.0016}\Rightarrow d=\frac{0.0006\cdot 0.01}{0.0016}=\frac{0.00006}{0.0016}$$
$$d=0.00375$$

د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو:

$$t = 2.79 + 0.00375 = 2.79375$$

$$\log x = \log(2.79375 \cdot 10^2) \Rightarrow x = 297.375$$

په داسې حال کې چې $anti \log 2.4466 = 297.375$ دی، نو: $3.17 \cdot 88.2 = 297.375$

آیا پوهېږئ؟

ددوو یا څو عددونو د ضرب لپاره لومړی د لوګاریتم د جمعې حاصل پیدا کوو ، وروسته یې انتي لوګاریتم په لاس راوړو چې دغه انتي لوګاریتم د نوموړو عددونو د ضرب حاصل تشکیلوي.

فعالیت

- د $74.2 \cdot 62$ د ضرب حاصل د لوګاریتم په واسطه پیدا کړئ.

د خارج قسمت پیدا کول د لوګاریتم په مرسته:

کولای شو د لوګاریتم له څلورم قانون څخه په کار اخیستنې سره ، د دوو اعشاري عددونو دتقسیم حاصل په لاس راوړو یعنې : $\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$

مثال: غواړو د $\frac{8750}{3.49}$ خارج قسمت د لوګاریتم پواسطه پیداکړو.

حل:

$$\log \frac{8750}{3.49} = \log 8750 - \log 3.49$$

د لوګاریتم له جدول څخه لرو چې:

$$\log 8750 = 3.9420$$

$$\log 3.49 = 0.5428$$

$$\log 8750 - \log 3.49 = 3.9420 - 0.5428 = 3.3992$$

$$anti \log 3.3992 = 2507$$

$$\frac{8750}{3.49} = 2507$$

يادونه: ددوو عددونو د خارج قسمت د حاصل پيداكولو لپاره لومړی دمقسوم لـه لوګـاريتم څخه د مقسوم عليه لوګاريتم كموو، وروسته ددغـه تفـاوت انتـي لوګـاريتم پـه لاس راوړو چی داد مطلـوب خـارج قسمت حاصل دی.

فعاليت

- د $\frac{374}{16.2}$ حاصل د لوګاريتم په مرسته په لاس راوړئ.

د لوګاريتم په واسطه د توان لرونكي عدد محاسبه:

د هغو توان لرونكوعددونومحاسبه چې توانونه يې تام اويا كسرونه وي، د لوګاريتم له پـنځم قـانون څخـه كـار اخلو يعني $\log M^n = n\log M$

مثال: غواړو چې د $(1.05)^6$ عدد محاسبه كړو.

حل:

$$\log(1.05)^6 = 6\log 1.05 = 6(0.0212)$$
$$= 0.1272$$

بناپردی $anti\log 0.1272 = 1.340$

په لنډ ډول ويلای شوچې: ديوه توان لرونكي عدد قيمت پيدا كولو لپاره لـومړی د عـدد تـوان پـه لوګـاريتم كې ضربوو، ددغه حاصل ضرب انتي لوګاريتم د توان لرونكي عدد قيمت دی.

فعاليت

- د $(694)^{\frac{2}{3}}$ عدد قيمت د لوګاريتم په واسطه پيداكړئ.

پوښتنې

1. د لاندې حاصل ضرب د لوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

2. لاندې د تقسیم حاصل د لوګاریتم په واسطه حساب کړئ.

$a)\ \dfrac{8}{737} = ?$ $\qquad$ $b)\ \dfrac{32.2}{25.1} = ?$

3. لاندې توان لرونکي عدد دلوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$(964)^{\frac{2}{3}} = ?$$

د څپرکي مهم ټکي

اکسپوننشيل تابع: که a يو مثبت عدد او $a \neq 1$ وي، نو د $f(x) = a^x$ تابع اکسپوننشيل تابع د a په قاعده نوميږي.

د اکسپوننشيل تابع خاصيتونه:

- د اکسپوننشيل تابع د تعريف ناحيه حقيقي عددونه او دقيمتونو ناحيه يې مثبت حقيقي عددونه دي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د اکسپوننشيل تابع گراف چې $a \neq 1$ وي، منحني يې د $(0،1)$ له ټکي څخه تېرېږي.
- د اکسپوننشيل تابع گراف نظر y محور ته متناظر واقع دی.
- هره اکسپوننشيل تابع معکوس لري چې معکوس تابع يې $Log_a x$ دی.

لوگاريتمي تابع: $y = \log_a x$ چې د $y = a^x$ اکسپوننشيل تابع معکوس دی، د لوگاريتمي تابع په نامه يادېږي.

دلوگاريتمي تابع خواص

- دلوگاريتمي تابع د قيمتونو ساحه مثبت حقيقي عددونه تشکيلوي.
- د لوگاريتمي تابع گراف په قايمو مختصاتو کې د $(1،0)$ له ټکي څخه تېرېږي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره تابع $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د قايمو مختصاتو په سيستم کې د هرې لوگاريتمي تابع $f(x) = \log_a x$ مجانب، د y محور دی.

د لوگاريتم قوانين:

- لومړی قانون $\log_a a = 1$
- دويم قانون $\log_a 1 = 0$
- دريم قانون $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
- څلورم قانون $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- پنځم قانون $\log_a x^n = n\log_a x$
- شپږم قانون $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$
- اووم قانون $\frac{\log_a M}{\log_a b} = \log_b M$
- اتم قانون $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

د لوګاریتم ډولونه:

معمولي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې 10 وي، معمولي لوګاریتم یا اعشاري (Brigys) لوګاریتم بلل کېږي چې د (log) په سمبول سره ښودل کېږي.

طبیعي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي، د طبیعي لوګاریتم په نامه یادېږي، چې طبیعي لوګاریتم د ln په سمبول ښودل کېږي یعنې $\log_e x = \ln x$

کرکټرستیک او مانتیس

کرکټرستیک که چېرې $\log x = n + \log S$ وي داسي چې $1 \le S < 10$ او n یو تام عدد دی n د مشخصې یا کرکټرستیک په نامه یادېږي چې د عدد د رقمونو له مخې ټاکل کېږي.

مانتیس: د $(\log S)$ اعشاري برخه د مانتیس په نامه یادېږي چې د جدول له مخې ټاکل کېږي، مانتیس یو مثبت عدد د صفر او یوه ترمنځ دی.

انتي لوګاریتم (antilogarithm): که $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاریتم انتي لوګاریتم دی یعنې $y = anti\log x$

خطي انټرپولیشن: که یو نامعلوم عدد ددوو معلومو عددونو په منځ کې واقع وي او د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، پدې صورت کې دا طریقه د خطي انټرپولیشن په نامه یادېږي.

اکسپوننشیل او لوګاریتمي معادلې

- **اکسپوننشیل معادلې** هغه معادلې چې په هغې کې د حدونو، توانونه مجهول وي، د اکسپوننشیل معادلې په نامه یادېږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره د طاقت له قوانینو څخه ګټه اخلو.
- **لوګاریتمي معادلې** هغه لوګاریتمي مساوات چې په هغوی کې مجهول موجودوي، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادېږي.

د ځېرکي پوښتني

لاندې پوښتنې په غور ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا اوله هغه څخه کړی تاو کړئ.

1. $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{4})$ مساوي له څو سره دی؟

$a)\ 4$ $\quad b)\ -4$ $\quad c)\ 3$ $\quad d)\ -3$

2. د $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$ اړيکه کې د b قيمت عبارت دی له:

$a)\ \frac{1}{4}$ $\quad b)\ 81$ $\quad c)\ \sqrt{81}$ $\quad d)\ -4$

3. د $\log_3 81 - \log 0.01$ افادې قيمت په لاس راوړئ.

$a)\ 0$ $\quad b)\ 4$ $\quad c)\ 8$ $\quad d)\ 9$

4. د x قيمت په $\log 81 - \log 2x = \log 3$ افاده کې مساوي له څو سره دی.

$a)\ 2$ $\quad b)\ 3$ $\quad c)\ 4$ $\quad d)\ 5$

5. $\log_2 16 = ?$

$a)\ 4$ $\quad b)\ 3$ $\quad c)\ 5$ $\quad d)\ -4$

6. $\log_{\frac{1}{5}} 125$

$a)\ 3$ $\quad b)\ -3$ $\quad c)\ 4$ $\quad d)\ 5$

7. د $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ قيمت عبارت دی له :

$a)\ \frac{1}{2}$ $\quad b)\ -\frac{1}{2}$ $\quad c)\ 1$ $\quad d)\ -1$

8. د x قيمت د $3^{x-1} = 9$ په معادله کې عبارت دی له :

$a)\ x=-3$ $\quad b)\ x=9$ $\quad c)\ x=-9$ $\quad d)\ x=3$

9. د $\log 234.21$ مشخصه ياکرکټرستيک عبارت دی له:

$a)\ 0$ $\quad b)\ 1$ $\quad c)\ 2$ $\quad d)\ 3$

10. د يوه عدد دلوګاريتم معکوس عبارت دی له:

$a)\ \log_a m = \frac{1}{\log_a m}$ $\quad b)\ \log_a m = -\frac{1}{\log_a m}$ $\quad c)\ \log_a m = \frac{1}{\log_m a}$ $\quad d)$ هيڅ يو

1. په لاندې معادلوکې د x قیمت پیدا کړئ

$a)\ 3^{x} = 3^{3x+2}$ $\quad b)\ 3^{2x} = 9^{4x-1}$

$c)\ \log_3(x+2) = 2\log_3 9$ $\quad d)\ 16^{x+1} = 64^{x-2}b$

$e)\ 15^{2x-1} = 7^{x+1}$ $\quad f)\ \log\sqrt{x+1} = 1 - \frac{1}{2}\log x$

$g)\ \log(4x-3) = 2 - \log 20$ $\quad h)\ \log_5(x-1) - \log_5(x-2) = \log_5 2$

2- لاندې لوګاریتمي افادې د لوګاریتم د قوانینو په کارولو سره ساده کړئ.

$a)\ \log_8 3\sqrt{4} = ?$ $\quad b)\ \log_3 \frac{1}{243} = ?$

$c)\ \log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $\quad d)\ \log(\frac{8}{\sqrt{128}}) = ?$ $\quad e)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)\ \log_8 \sqrt[3]{4} = ?$ $\quad b)\ \log_3 \frac{1}{243} = ?$

$c)\ \log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $\quad d)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$ $\quad e)\ \log\frac{8}{\sqrt{128}} = ?$

4. لاندې انتي لوګاریتمونه پیدا کړئ.

$a)\ 1.7300$ $\quad b)\ 0.8954$ $\quad c)\ 4.5682$ $\quad d)\ \bar{2}.1987$

5. دلاندې هر عدد لوګاریتم حساب کړئ.

$a)\ 89500$ $\quad b)\ 91$ $\quad c)\ 3065.3$ $\quad d)\ \log 0.002$

6. د لوګاریتم په مرسته لاندې حاصل ضرب پیدا کړئ.

$a)\ 2.01 \cdot 52.9$ $\quad b)\ (0.0062)(-34.8)$

7. د لاندې تقسیم حاصل د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ 0.888 \div 256$ $\quad b)\ 17.3 \div 7.47$

8. د لاندې توان لرونکو عددونو قیمتونه د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ (7.42)^3$ $\quad b)\ (-84.7)^2$ $\quad c)\ \sqrt{418}$ $\quad d)\ \sqrt{0.21}$

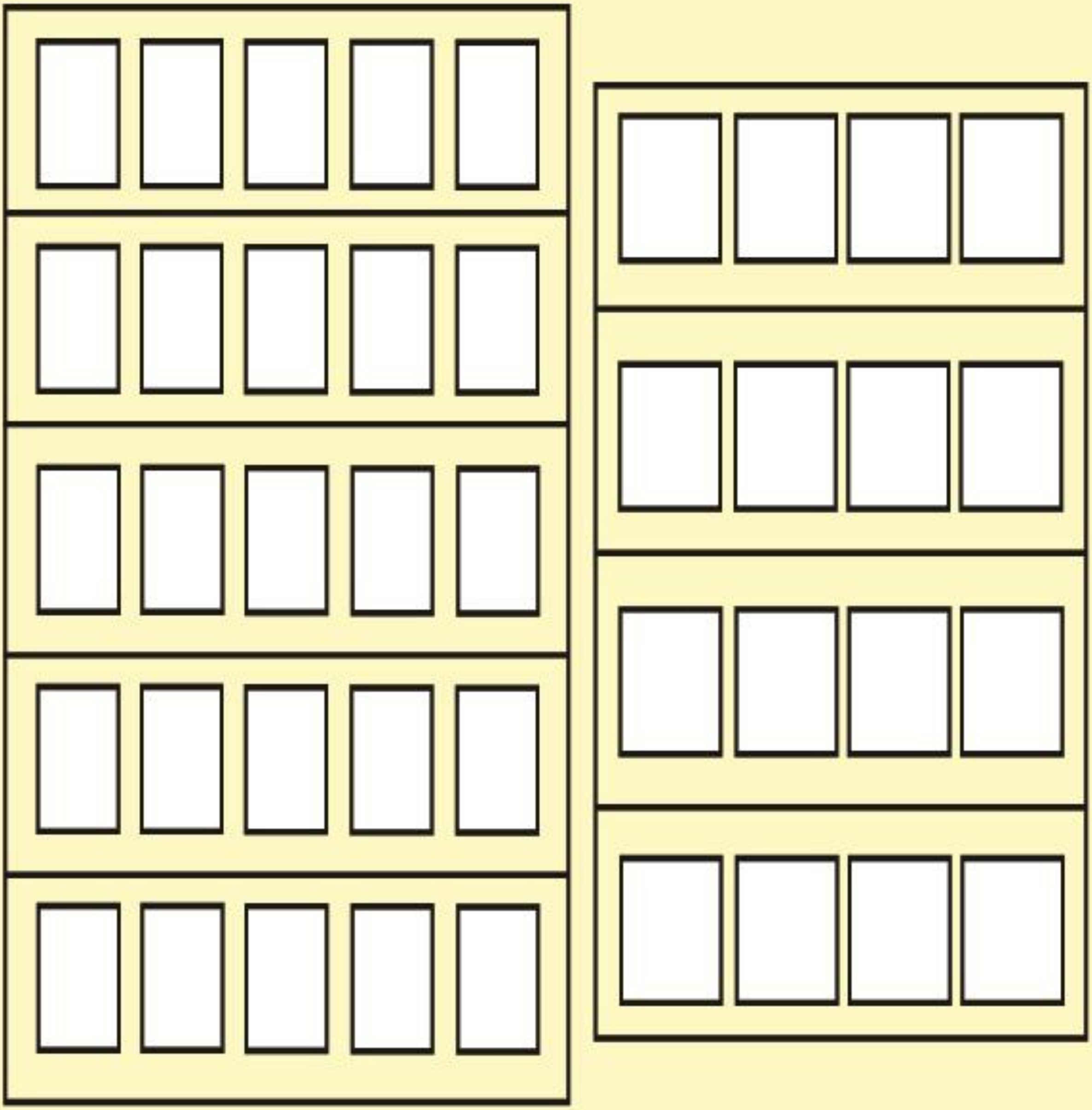
د لوگاريتم جدول چې مانتيس يې څلور اعشاري رقمونه لري

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

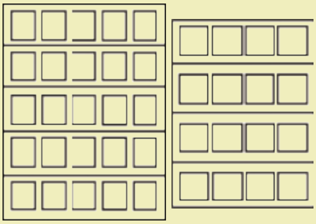
شپرزم خپرکی

مەریکسونە



متریکسونه

Matrixes



د څو پوړیزې ودانۍ تصویر په پام کې نیسو، هره ودانۍ څو پوړه لري، په مخامخ شکل کې وینو چې د لویې ودانۍ د کړکیو شمېر $5 \cdot 5 = 25$ دی، د کوچنۍ ودانۍ د هر پوړ کړکۍ وشمېرئ.

فعا لیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $M(x, y)$ ټکی وټاکئ.
- د M ټکی متناظر یعنې $M'(x', y')$ نظر x محور ته وټاکئ.
- د M او M' مختصاتو تر منځ اړیکې ولیکئ.
- پورتنۍ اړیکې د ضریبونو په څېر ولیکئ.
- د پورتني فعالیت ټول مراحل، د p او د هغه متناظر p'، نظر y محورته S او د هغه متناظر S' نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ سرته ورسوئ.

د پورتني فعالیت له اجراء څخه وروسته لاندې پایله لیکلای شو:

$$\begin{cases} x = x' \\ -y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 0y = x' \\ 0x - 1y = y' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{M}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \overset{M'}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

په دې معنا چې د M ټکی د $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ په واسطه د M' په ټکي بدل او یا اوښتی دی.

پوهېږئ چې هر یو $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د یوه ټکي ستوني ښوونه ده.

او دغه جدول $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ یوه نوې وسیله ده چې د لومړي ځل لپاره تاسو له هغې سره مخامخ کېږئ.

په همدې ډول: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ هر يو د p, p' او s, s' دټکوبدل شوي وسيله ده.

لاندې هرې يوې وسيلې ته (چې دټکود بدلولو د بدليدو دنده په غاړه لري) مټريکس وايي.

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

تعريف: د شيانو، عددونو يا تورو ګېډۍ چې په سطري او ستوني ډول، په يوه مستطيلي جدول کې ترتيب شي، د مټريکس (Matrix) په نامه يادېږي.

د مستطيلي جدول هر عنصر د مټريکس د عنصر په نامه يادېږي. لوی حروفونه د $A, B, C\ldots$ مټريکس ښيي او واړه حروفونه $a, b, c\ldots$ د مټريکس عناصر دي.

د عددونو هر يولاندی جدول يو مټريکس په ګوته کوي.

$$B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

لومړی سطر
دويم سطر
دريم سطر

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ -3 & 7 & 5\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

لومړی سطر
دويم سطر
دريم سطر

لومړی ستون، دويم ستون، دريم ستون

$$C=\begin{pmatrix}0 & \frac{4}{3} & 7 & -2\end{pmatrix}$$

کرښه

که چېرې a د يوه مټريکس په $i-$ام کرښه او $j-$ام ستون کې ځای ولري، هغه د a_{ij} په شکل ښودل کېږي چې i او j طبيعي عددونه دي، په ترتيب سره د سطر او ستون له شمېر څخه ښکارندويي کوي.

$$i=1,2,3\ldots \quad , \quad j=1,2,3\ldots$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots a_{2n}\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\ldots a_{mn}\end{pmatrix}$$

د مېټريکس مرتبه: که د A د مېټريکس د سطرونو شمېر m او د ستونونو شمېر يې n وي، وايو چې د A مېټريکس مرتبه د $m \times n$ څخه عبارت دی اوداسې ويل کېږي m په n کې مېټريکس او ليکو $A=(a_{ij})_{m\times n}$ د هر مېټريکس د سطرونو او ستونونو شمېر د همغه مېټريکس مرتبه ښيي.

فعاليت

- د لاندې مېټريکسونو مرتبه وټاکئ.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

پاملرنه وکړئ، هغه مېټريکس چې يو سطر او يو ستون لري يعنې $A=(X)_{1\times 1}$ ، نو د A مېټريکس د هغه له داخلي عدد سره مساوي دی. $A=(7)_{1\times 1}=7$

مثال: لاندې مېټريکسونه د مستطيلي جدول په ډول وليکئ.

$a) \quad (a_{ij})_{2\times 2}=(i+j)_{2\times 2} \qquad\qquad b) \quad (a_{ij})_{3\times 2}=(i\cdot j)_{3\times 2}$

حل: د پورتني هر مثال د حل لپاره لومړی د مېټريکس عمومي شکل ليکو، د a جزء د مېټريکس عمومي شکل 2×2 کې يو مېټريکس دی.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}=i+j$

$a_{11}=1+1=2 \ , \ a_{12}=1+2=3 \ , \ a_{21}=2+1=3 \ , \ a_{22}=2+2=4$

په پايله کې غوښتل شوی مېټريکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

د b جزء: د b جزء د مېټريکس عمومي شکل يو (3×2) کې مېټريکس دی، يعنې 3 سطره او 2 ستونه لري.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$a_{11}=1\cdot 1=1 \ , \ a_{21}=2\cdot 1=2 \ , \ a_{31}=3\cdot 1=3$

$a_{12}=1\cdot 2=2 \ , \ a_{22}=2\cdot 2=4 \ , \ a_{32}=3\cdot 2=6$

په پایله کې غوښتل شوی متریکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

دوهمه مرتبه متریکسونه هغه وخت سره مساوي دي چې د هغوی هر عنصر یو په یو سره مساوي وي، مثلاً:

$\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ هغه وخت یوله بل سره مساوي دي چې $a=-1$ او $b=2$ وي، آیا $(1 \quad 2)$ او $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ متریکسونه یوله بل سره مساوي دي اوکه نه؟ ولې؟

پوښتني

1. د لاندې متریکسونو مرتبې ولیکئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. لاندې متریکسونه د مستطیلي جدول په شکل ولیکئ.

$a)\ (a_{ij})_{3\times3} = (2i+3j)_{3\times3}$ $\qquad$ $b)\ (a_{ij})_{2\times3} = (\frac{i}{j})_{2\times3}$

د مېټريکسونو ډولونه

د مېټريکسونومخامخ شکلونه څو سطرونه اوڅوستونونه لري؟

آیاصفرونه دمېټريکس عناصر کیدای شي؟

$$\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}\qquad (4\ \ 5\ \ 6)\qquad \begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

1. **سطري مېټريکس(Row Matrix):** هغه مېټريکس چې يوازې او يوازې يو سطر ولري، سطري مېټريکس يې بولي، مثلاً: $A=(4\quad 5\quad 9\quad 0)_{1\times 4}$

2. **ستوني مېټريکس (Column Matrix):** هغه مېټريکس دى چې يوازې يو ستون ولري، د ستوني مېټريکس په نامه يادېږي، مثلاً: $A=\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}_{3\times 1}$

3. **صفري مېټريکس(Null matrix):** هغه مېټريکس چې ټول عناصريې صفرونه وي، له صفري مېټريکس څخه عبارت دى او د $0_{m\times n}$ په شکل يې ښيي.

$$0_{2\times 4}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}_{2\times 4}\qquad 0_{3\times 2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

4. **مربعي مېټريکس(Square Matrix):** که چېرې په يوه مېټريکس کې د سطرونو شمېر د ستونونو له شمېرسره برابر $(m=n)$ شي، د مربعي مېټريکس په نامه يادېږي، مثلاً:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4\\5&7&9\\-1&0&2\end{pmatrix}_{3\times 3}\quad ,\qquad m=n\ \Rightarrow\ 3=3$$

هر مربعي مېټريکس دوه قطرونه لري.

هغه قطر چې عناصر يې $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ وي، اصلي قطر (Mean diagonal) او هغه قطر چې عناصر يې $a_{1n}, \ldots, a_{n1}$ وي، فرعي قطر (Minor Diagonal) بلل کېږي.

اصلي قطر — فرعي قطر

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فرعي قطر — اصلي قطر

فعاليت

- داسې مېټريکسونه وليکئ چې مرتبې يې 1×3 او 4×1 وي، دا څه ډول مېټريکسونه دي؟

5. **قطري مېټريکس** (Diagonal Matrix)**:** هغه مېټريکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، د قطري مېټريکس په نامه يادېږي.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad ، \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

6. **سکالر مېټريکس** (Scalar Matrix)**:** هغه قطري مېټريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره مساوي وي، د سکالر مېټريکس په نامه يې يادېږي، لکه:

$$A = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & K & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & K & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & K \end{pmatrix}_{m\times n}$$

7. **واحد مېټريکس** (Unite Matrix)**:** که چېرې په يو سکالر يا قطري مېټريکس کې د اصلي قطر ټول عناصر د (1) عدد وي، دغه ډول مېټريکس ته واحد مېټريکس وايي او په I_n سره ښوول کېږي.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots0 \\ 0 & 1 & 0\ldots0 \\ 0 & 0 & 1\ldots0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\ldots1 \end{pmatrix}$$

فعالیت

- یو د 3×3 مرتبې میټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر ښکته ټول عناصر یې صفرونه وي.
- په همدې ډول یو د 3×3 مرتبې میټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر پورتني عناصر یې ټول صفرونه وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانیږي:

که چیرې په یوه مربعي میټریکس کې د اصلي قطر پورتني او یا ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، په دغه صورت کې میټریکس د مثلثي میټریکس (Triangular matrix) په نامه یادیږي.

که چیرې د اصلي قطر پورتني ټول عناصر صفرونه وي، د پورتني مثلثي میټریکس (Upper triangular matrix) او که چیرې د اصلي قطر ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، د ښکتني مثلثي میټریکس (lower triangular matrix) په نامه یادیږي.

په لاندې مثالونو کې A یو پورتنی مثلثي میټریکس او B ښکتنی مثلثي میټریکس دی.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&0\\3&7&9\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&9\\0&0&4\end{pmatrix}$$

متقابل (متضاد) میټریکس:

که چیرې د A متقابل میټریکس په $(-A)$ سره وښودل شي نو، دا هغه میټریکس دی چې هر عنصر د A متناظر عنصر متضاد دی. که چیرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو میټریکس وي، نومتقابل میټریکس یې $(-A)$ په لاندې ډول تعریفیږي:

$$A=(a_{ij})_{m\times n}\overset{\text{متقابل}}{\Rightarrow}-A=(-a_{ij})_{m\times n}$$

لکه په لاندې مثال کې:

$$A=\begin{pmatrix}2&4&5\\-1&2&0\\2&-3&-4\end{pmatrix}\Rightarrow -A=\begin{pmatrix}-2&-4&-5\\1&-2&0\\-2&3&4\end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. لاندې مټريکسونه په پام کې ونيسئ، مرتبې او اړوند نومونه يې وټاکئ:

a) $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -5\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

e) $E=\begin{pmatrix}5 & -6 & 7 & 8\end{pmatrix}$

f) $F=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$

g) $G=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$

h) $H=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

د مېټريکسونو جمع او تفريق

Addition and subtraction of Matrix

$$\left.\begin{array}{r} A+A= \\ A-A= \\ A+B= \\ A-B= \\ B+B= \\ B-B= \end{array}\right\} ?$$

په مخامخ مېټريکسونو کې د هغوی د جمعې او تفريق

په اړه د امکان په صورت کې څه ويلای شئ.

1) **د مېټريکسونو جمع**:

که چېرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ دوه مېټريکسونه وي، نو $A+B=C$ عبارت له هغه مېټريکس څخه دی چې د C_{ij} هر عنصر يې د a_{ij} او b_{ij} د جمعې له حاصل څخه لاس ته راغلی وي، يعنې د دوو مېټريکسونو جمع کول يوازې هغه وخت امکان لري چې د دواړو مېټريکسونو مرتبې سره مساوي وي. څرنګه چې C_{ij} د دوو حقيقي عددونو د جمعې حاصل دی، نو:

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}\Rightarrow (a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7+(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=C_{3\times 2}$$

2. **د مېټريکسونو تفريق**:

د جمعې عمليې ته ورته کولای شو، د دوو مېټريکسونو تفاضل يا د تفريق حاصل په لاس راوړو. که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ وي، نو د تفريق حاصل يې په لاندې ډول په لاس راوړای شو:

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

فعاليت

- که $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ وي، $A-B$ په لاس راوړئ.

د مېټريکسونو د جمعې او تفريق خاصيتونه:

1. د مېټريکسونو جمع کول دبدلون خاصيت لرى، خو د مېټريکسونو تفريق د بدلون خاصيت نه لري، يعنې:

$A+B=B+A$

$A-B\neq B-A$

2. د مېټريکسونو جمع او تفريق اتحادي خاصيت لري. $(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$

3. د عينيت عنصر (Identity Element) د مېټريکسونو په جمع کې صدق کوي ،خو د مېټريکسونو په تفريق کې صدق نه کوي. $A+0=0+A=A$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: ځرنگه چې د دواړو مېټريکسونو مرتبه سره برابره (3×3) ده، نو کولای شو د تفريق حاصل يې په لاس راوړو.

$$A-B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-11&2-1&3-5\\2&-0&5-3&4-0\\6&-2&0-5&1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&1&-2\\2&2&4\\4&-5&-5\end{pmatrix}$$

فعاليت

- د يوه مثال په واسطه وښاياست چې $A-B\neq B-A$ دى.

دويم مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\0&6\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3&1&3\\2&5&-1\end{pmatrix}$ وي، د امکان په صورت کې $A+B$ او $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: ليدل کېږي چې د A او B مېټريکسونو مرتبې سره خلاف دي، نو له دې امله يې جمع او تفريق امکان نه لري، ځکه د A د مېټريکس مرتبه 3×2 او د B مېټريکس مرتبه 2×3 ده.

پوښتنې

لاندې مېټريکسونه د امکان تر بريده جمع او تفريق کړئ:

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$, c) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&4\\-1&0&1\end{pmatrix}$

په مټریکس کې د سکالر ضرب

مونږ د مټریکسونو د جمعې او تفریق قاعده ولیدله که

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یو **مټریکس** او K یـو سکالر وي،

د هغوی د ضرب حاصل په اړه څه فکر کوئ؟

$$K\cdot A=K\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ یو **مټریکس** او k یو سکالر وي، د $K\cdot A$ حاصل په لاس راوړئ.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad , \quad KA=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- د $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ **مټریکس** په کوم عدد کې ضرب شي، تر څو یې د ضرب حاصل یو واحد مټریکس شي.

کولای شو د فعالیت له اجرا کولو وروسته یې په لاندې ډول تعریف کړو.

تعریف: که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو **مټریکس** او $K\in IR$ یو حقیقي عدد وي، نو KA د C له **مټریکس** څخه عبارت دی، په داسې حال کې چې د C_{ij} هر عنصر د K د ضرب حاصل په a_{ij} کې دی.

$$C_{ij}=K(a_{ij})$$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ او $K=2$ وي، د KA د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$K\,A=2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot1 & 2\cdot3 & 2\cdot6 \\ 2\cdot2 & 2\cdot1 & 2\cdot0 \\ 2\cdot1 & 2\cdot0 & 2(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

په مېټريکس کې د سکالر ضرب خاصيتونه:

که چېرې A او B دواړه د يو شان مرتبې مېټريکسونه، α او β دوه حقيقي عددونه وي، نو:

$a)\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$b)\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$c)\ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

دويم مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$, $\alpha=3$, $\beta=2$ راکړل شوي وي، وښاياست چې

$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

حل:

$$\alpha(\beta A)=3\left[2\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix}2\cdot 3 & 2\cdot 6\\ 2(-3) & 2\cdot 9\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}6 & 12\\ -6 & 18\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 6 & 3\cdot 12\\ 3(-6) & 3\cdot 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$(\alpha\ \beta)A=(3\cdot 2)\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6\cdot 3 & 6\cdot 6\\ 6(-3) & 6\cdot 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\beta(\alpha\ A)=2\left[3\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=2\begin{pmatrix}3\cdot 3 & 3\cdot 6\\ 3(-3) & 3\cdot 9\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}9 & 18\\ -9 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$$

پوښتنې

1. که چېرې $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha=2$ او $\beta=1$ راکړل شوي وي. په مېټريکس کې د سکالر ضرب درې خاصيتونه تطبيق کړئ؟

2. که $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ او $K=3$ وي، KA او $\frac{1}{K}A$ پيدا کړئ.

د دوو مېټريکسونو ضرب

Multiplication of two Matrixes

ایاد دوو مېټريکسونو د ضرب لپاره کوم نظر ورکولای شئ؟

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=?$$

تاسو د دوو مېټريکسونو د جمعې لپاره پيدا کړل چې $A+B=B+A$ دی، د مېټريکسونو د ضرب لپاره څه فکر کوئ؟

تعريف

دوه مېټريکسونه د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ په پام کې ونيسئ، د دې لپاره چې دا داوړه مېټريکسونه يو په بل کې ضرب شي، نو بايد د لومړی مېټريکس د ستونونو شمېر د دويم مېټريکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي. د مېټريکسونو د ضرب حاصل بيا هم يو مېټريکس دی ،لکه: $C=(a_{ij})_{m\times p}$ چې د سطرونو شمېر يې د لومړي مېټريکس د سطرونو په اندازه او د ستونونو شمېر يې د دويم مېټريکس د ستونونو له شمېر سره برابر دی.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

د دوو مېټريکسونو د ضرب لپاره په لاندې ډول کړنه کوو:

د لومړي مېټريکس لومړی سطر د دويم مېټريکس په ټولو ستونو کې په وار سره ضربوو او په همغه سطر کې يې ليکو، په دويمه مرحله کې بيا هم د لومړي مېټريکس دويم سطر د دويم مېټريکس په ټولو ستونونو کې په وار سره ضربوو او په همغه دويمه سطر کې يې ليکو، دغې عمليې ته تر هغه دوام ورکوو، ترڅو ټول سطرونه د لومړي مېټريکس په دويم مېټريکس کې ضرب شي، په دغه ډول د مېټريکسونو د ضرب حاصل محاسبه کيږي. دغه مطلب کولای شو په لاندې ډول وښيو.

$$(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=(C_{ij})_{m\times p}$$

لومړی مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل: د دوو مېټريکسونو د ضرب له تعريف څخه پوهېږو:

دويم پړاو

لومړی پړاو

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+0\cdot(-1)\\-1\cdot1+0\cdot0+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

دويم مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-2&1&2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\-1&2\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A\cdot B$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: بيا هم د مېټريکسونو د ضرب له تعريف څخه په کار اخېستنې لرو چې:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-2&1&2\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\-1&2\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}2&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}-2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}-2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+3\cdot2+(-1)(-1)&2\cdot3+3\cdot0+(-1)\cdot2\\(-2)(1)+1\cdot2+2(-1)&-2(3)+1\cdot0+2\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+6+1&6+0-2\\-2+2-2&-6+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&4\\-2&-2\end{pmatrix}_{2\times2}$$

دريم مثال: $A=\begin{pmatrix}1&3\\5&2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3&2&0\\6&1&7\end{pmatrix}$ وي $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&3\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&0\\6&1&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+3\cdot6&1\cdot2+3\cdot1&1\cdot0+3\cdot7\\5\cdot3+2\cdot6&5\cdot2+2\cdot1&5\cdot0+2\cdot7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3+18&2+3&0+21\\15+12&10+2&0+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&5&21\\27&12&14\end{pmatrix}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$ وي، د ضرب دحاصل دشتون په صورت کې AB او BA پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

خلورم مثال: که $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ او $D=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ وي، CD او DC پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

حل:

$$CD=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(-3)+(-1)(-4) & 2\cdot4+(-1)(-3)\\ 1(-3)+2(-4) & 1\cdot4+2(-3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 8+3\\ -3-8 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

$$DC=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot2+4\cdot1 & (-3)(-1)+4\cdot2\\ -4\cdot2+1\cdot(-3) & -4(-1)+(-3)\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 3+8\\ -8-3 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

معلومېږي چې $CD=DC$ دی.

د مېټریکس د ضرب خواص:

لومړی خاصیت: په عمومي ډول د دوو مېټریکسونویه ضرب کې د بدلون خاصیت صدق نه کوي.

یعنې که A او B دوه مېټریکسونه او AB او BA تعریف شي، نو: $AB\neq BA$

دویم خاصیت: د مېټریکسونو ضرب د اتحادي ضرب خاصیت لري. که چېرې B,A او C د $m\times n$ مرتبې مېټریکسونه وي، نو $(AB)C=A(BC)$

دریم خاصیت: د مېټریکسونو ضرب توزیعي خاصیت د جمعې او ضرب لپاره لري، نو لرو:

$a)\ A(B+C)=AB+AC$

$b)\ (A+B)C=AC+BC$

$c)\ K(AB)=(KA)B=A(KB)\ ,\quad K\in IR$

$d)\ IA=AI=A$

پوښتنې

د لاندې متریکسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

$$b)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = ?$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$$

د یوه مټریکس ترانسپوز

Transpose of Matrix

که په یو مټریکس کې سطرونه په ستونونو او ستونونه په سطرونو بدل شي نوی مټریکس چې په لاس راځي په څه نوم یادېږي؟

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ مټریکس په پام کې ونیسئ، سطرونه ستونونوته او ستونونه سطرونو ته ولېږدوئ، هغه نوی مټریکس چې په لاس راځي ویې لیکئ.
- که چېرې د یوه مټریکس د سطرونو او ستونونو ځایونه یوله بل سره بدل کړو افقي لیکې په عمودي او عمودي په افقي واړوو، هغه نوی مټریکس چې لاس ته راځي، آیا له لومړي مټریکس سره مساوي دی، نوی مټریکس په څه نوم یادېږي؟

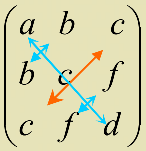
له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: که چېرې د یوه مټریکس چې مرتبه یې $(m\times n)$ وي، سطر په ستون او ستون په سطر واړول شي، هغه نوی مټریکس چې په لاس راځي، له ټرانسپوز(Transpose) مټریکس څخه عبارت دی، د A ټرانسپوز مټریکس په A^T بښودل کېږي. د ټرانسپوز مټریکس مرتبه $(n\times m)$ ده.

مثلاً: که چېرې $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}_{2\times3}$ وي، نو ترانسپوز مټریکس یې عبارت دی له: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}_{3\times2}$، که یو ټرانسپوز مټریکس یعنې A^T له خپل ځان یعنې A سره مساوي شي، نو په دې صورت کې A مټریکس ته متناظر مټریکس (Symmetric Matrix) وایي.

مثلاً: $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}$ یو متناظر مټریکس دی، ځکه: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=A$

د متناظر مټریکس پېژندل: په متناظرو مټریکسونو کې عناصر نظر اصلي قطر ته متناظراو مساوي دي:



د ټرانسپوز میټریکس خواص:

لومړی خاصیت: د یوه ټرانسپوز میټریکس ټرانسپوز له خپل لومړي میټریکس سره مساوي دی.

$$(A^T)^T = A \Rightarrow \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A$$

دویم خاصیت: د دوو یا څو ټرانسپوز میټریکسونو د جمعې او تفریق حاصل د دوی د هر یوه د جمعې او تفریق له ټرانسپوز میټریکسونو سره مساوی دی. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

او یا په عمومي ډول $(A \pm B \pm C \pm ...)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm ...$

دریم خاصیت: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

څلورم خاصیت:

$(\alpha A)^T = \alpha A^T \quad , \quad \alpha \in IR$

$(-A)^T = -A^T$

فعالیت

- که چېرې $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، وښایاست چې:

$$(A - B)^T = A^T - B^T \quad , \quad (A + B)^T = A^T + B^T$$

مثال: د لاندې میټریکسونو ټرانسپوز میټریکسونه په لاس راوړئ.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

حل:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

پوښتنې

1. د A او B میټریکسونه په پام کې ونیسئ، د هغوی ټرانسپوز میټریکسونه په لاس راوړئ.

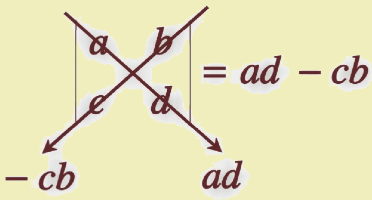
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

2. په پورتنیو میټریکسونو باندې د 3 عدد لپاره د ټرانسپوز میټریکس 4 خاصیتونه وښایاست.

دیټرمینانت

Determinant

په یوه عددي مثال کې یو مربعي میټریکس داسې وټاکئ چې د $ad-bc$ حاصل تفریق مساوي په صفر شي.



تعریف

که چېرې د A میټریکس یوه حقیقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د میټریکس له دیټرمینانت څخه عبارت دی، د $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ د میټریکس دیټرمینانت په $|A|$، det A او یا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ په ډول ښودل کیږي.

په همدې ډول که چیرې د $n\times n$ مرتبې یو میټریکس چې n سطرونه او n ستونونه ولري، اړونده دیټرمینانت یې له n درجې څخه دی. د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ یو مربعي میټریکس په پام کې نیسو او د تعریف سره سم لرو چې:

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}_{nxn}$$

د 2×2 مرتبې میټریکسونو د دیټرمینانت محاسبه: د $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ میټریکس دیټرمینانت په لاندې ډول تعریفوو.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=a\,d-bc$$

مثال: د $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ میټریکس دیټرمینانت حساب کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-7\cdot 4=6-28=-22$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ میټریکس دیټرمینانت محاسبه کړئ.

د 3×3 متريكسونو د ديترمينانت محاسبه: د $A_{3\times3}$ متريکس، ديترمينانت په پام کې نيسو:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

حل: د $A_{3\times3}$ ديترمينانت د محاسبې لپاره لاندې ټکي په پام کې نيسو:

لومړی پړاو: اول ستون او دريم سطر له منځه وړو، د 2×2 مرتبې ديترمينانت محاسبه او د لومړي ستون او دريم سطر د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})a_{31}$$

دويم پړاو: دويم ستون او دريم سطر حذفوو، د 2×2 مرتبې ديترمينانت محاسبه او د دويم ستون او دريم سطر د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو ، هېره دې نه وي چې د ديترمينانت د محاسبې لپاره علامې په متناوب ډول بدلون مومي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow -(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})a_{32}$$

دريم پړاو: دريم ستون او دريم سطر له منځه وړو، د 2×2 مرتبې ديترمينانت محاسبه، د دريم سطر او دريم ستون د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})a_{33}$$

څلورم پړاو: د 1، 2 او 3 ټول پړاوونه سره جمع کوو، په دې ډول د A ديترمينانت مقدار په لاس راځي.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})\,a_{31}-(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})\,a_{32}+(a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})\,a_{33}$$

$$=a_{12}\,a_{23}\,a_{31}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}+a_{21}\,a_{13}\,a_{32}+a_{11}\,a_{22}\,a_{33}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

مثال: د لاندې ډيټرمينانت مقدار په لاس راوړئ.

$$B=\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

حل: له تېرو معلوماتو څخه کار اخلو:

$$\text{I)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (6\cdot 2-1(-3))\cdot 4=(12+3)\cdot 4=15\cdot 4=60$$

$$\text{II)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -(2\cdot 2-5(-3))(-1)=4+15=19$$

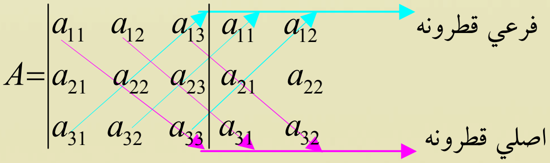
$$\text{III)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (2\cdot 1-5(6))\cdot 7=(2-30)\cdot 7=-28\cdot 7=-196$$

$$\text{I}+\text{II}+\text{III}=60+19-196=-117$$

فعاليت

- د $A=\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ له ډيټرمينانت څخه د a قيمت په لاس راوړئ.

دويمه طريقه: **د ساروس په طريقه د ډيټرمينانت محاسبه**: پـه دغـه طريقـه کـې د ډيټرمينانت دوه لـومړي سـتونونه ښـي لورې ته په لاندې ډول تکرار ليکو:



د اصلي قطر عناصر يوله بل سره ضرب او جمع کوو، په همدې ډول د فرعي قطر عناصـر يولـه بـل سره ضـربوو او وروسته يې جمع کوو، همدارنگه د اصلي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب له مجموع څخه، د فرعي قطرونـو د عناصرو د حاصل ضرب مجموع کموو، په دې ډول د A د متريکس ډيټرمينانت مقدار په لاس راځي:

$$|A|=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$$

په دغه طریقه کې کولای شو د لومړي او دویم ستون د لیږد په ځای لومړی او دویم سطر د دیټرمینانت لاندینی برخې ته انتقال کړو او د تیر په ډول کړنه سرته رسوو.

دویم مثال: د لاندې دیټرمینانت قیمت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

حل:

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{matrix}$$

$$=\big(3\cdot 3\cdot 6+2\cdot 0\cdot 5+(-1)(-4)(-2)\big)-\big((-1)\cdot 3\cdot 5+3\cdot 0(-2)+2(-4)\cdot 6\big)$$

$$=(54+0-8)-(-15+0-48)=46+63=109$$

فعالیت

- لاندې د $|A|$ دیټرمینانت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې دوه لومړني سطرونه د دیټرمینانت لاندې برخې ته ولیږدوئ او عملیه سرته ورسوئ.

$$|A|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې دیټرمینانتونو مقدار په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\quad,\quad b)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}\quad,\quad c)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}\quad,\quad d)\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

2. د لاندې دیټرمینانتونو مقدار د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$a)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix}\quad,\quad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

د ډيټرمينانت خاصيتونه

که چيرې په يوه ډيټرمينانت کې د سطر ځاى له ستون سره بدل شي، د ډيټرمينانت په قيمت کې تغير راځي او که نه؟

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

فعاليت

- د $|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ او $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ ډيټرمينانتونه محاسبه کړئ.
- د $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 6\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}$ ډيټرمينانت پـه پـام کې ونيسئ، ترانسپوز يې پـه لاس راوړئ ، وروسته يې $|A^T|$ ډيټرمينانت محاسبه کړئ او وښاياست چې $|A|=|A^T|$.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي.

که چيرې $A_{n\times n}$ يو ميټريکس وي، د $|A|$ ډيټرمينانت لپاره لاندې خواص صدق کوي.

1. که د $A_{n\times n}$ ميټريکس د يوه سطر او يا يوه ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو د A ډيټرمينانت مساوي له صفر سره دى.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & e & f\end{vmatrix}=0 \quad , \quad |A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0$$

2. که چيرې د $A_{n\times n}$ ميټريکس دوه سطرونه يا دوه ستونونه سره مساوي وي، نو اړوند ډيټرمينانت يې مساوي له صفر سره دى.

$$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0$$

3. که د $A_{n\times n}$ ميټريکس د يوه سطر او يا يوه ستون عناصر د بل سطر او يا ستون د عناصرو ګډ فکتور وي، نو $|A|=0$ دى.

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ \lambda a & \lambda b & \lambda c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda(0)=0$$

4. د A ميټريکس ډيټرمينانت او A^T ميټريکس ډيټرمينانت يو له بل سره مساوي دي، په همدې ډول ډيټرمينانت ځينې نور خاصيتونه يا ځانګړنې هم لري، لکه:

که چېرې په یوه دیټرمینانت کې د دوو سطرونو یا دوو ستونونو ځایونه یو له بل سره بدل شي، د دیټرمینانت اشاره بدلون مومي.

لومړی مثال: د $|A|=\begin{vmatrix}2&-1&4\\1&2&-2\\3&1&0\end{vmatrix}$ دیټرمینانت لومړي ستون له دویم ستون سره بدل کړئ او وروسته د دواړو دیټرمینانتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix}2&-1&4\\1&2&-2\\3&1&0\end{vmatrix}\Rightarrow(0+6+4)-(24-4+0)=-10$$

$$B=\begin{vmatrix}-1&2&4\\2&1&-2\\1&3&0\end{vmatrix}=(0+24-4)-(4+6+0)=20-10=10$$

لیدل کېږي چې د A په دیټرمینانت کې دویم ستون له لومړي ستون سره بدل شي، په ورته ډول کولای شو،دوه سطرونه هم یوله بل سره بدل کړو،نوداسې پایله په لاس راځي: $|A|=-|B|$

که د K یو ثابت عدد په دیټرمینانت کې ضرب شي، دغه عدد یوازې په یوه سطر او یا یوه ستون کې په اختیاري ډول ضربېدلای شي. په همدې ډول کولای شو د یوه دیټرمینانت ګډعامل له یوه سطر او یا یوه ستون څخه ګډ عددوټاکوچې د دیټرمینانت ګډ فکتور بلل کېږي.

دویم مثال: د $|A|$ دیټرمینانت ګډ ضربي عامل پیدا کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}16&3&22\\8&2&21\\20&1&25\end{vmatrix}$$

حل: لیدل کېږي چې د دیټرمینانت په لومړي ستون کې د 4 عدد ګډ ضربي عامل دی چې په حقیقت کې دا عدد د دیټرمینانت ګډ ضربي عامل دی.

$$|A|=\begin{vmatrix}16&3&22\\8&2&21\\20&1&25\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}4&3&22\\2&2&21\\5&1&25\end{vmatrix}$$

پوښتنې

د دیټرمینانت دخواصو په مرسته د لاندې دیټرمینانتونو قیمت په لاس راوړئ.

$$a)\begin{vmatrix}0&1&2\\0&3&4\\0&5&6\end{vmatrix}\qquad b)\begin{vmatrix}1&2&4\\7&9&11\\0&0&0\end{vmatrix}\qquad c)\begin{vmatrix}3&5&8\\0&4&2\\0&0&1\end{vmatrix}$$

د 2×2 مرتبه يي مېټريکسونو ضربي معکوس

Multiplication inverse of 2×2 *matrixes*

آيا د حقيقي عددونودضرب قاعده مو په ياد ده؟

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

د a حقيقي عدد ضربي معکوس کوم عدد دی؟

په همدې ډول د ځينو مربعي مېټريکسونو لپاره هم دا خاصيت، د مېټريکسونو د خاصيتونو په پام کې نيولو سره شتون لري.

فعاليت

- د $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ مېټريکس په پام کې ونيسئ او ديټرمينانټ يې محاسبه کړئ.
- د $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ مېټريکس د A له مېټريکس سره ضرب او پايله يې وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانولای شو:

تعريف: د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ غير صفري مربعي مېټريکس په پام کې نيسو، که چېرې د B مربعي مېټريکس داسې موجود وي چې: $AB=BA=I$

په دې صورت کې د B مېټريکس د A د مېټريکس معکوس بلل کېږي او هغه په A^{-1} سره ښيي. له دې امله ليکلی شوچې: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

په ياد ولرئ: د A مربعي مېټريکس ته منفرد مېټريکس(Singular Matrix) ويل کېږي، کله چې $|A|=0$ وي او همدارنګه د A مربعي مېټريکس ته غير منفرد مېټريکس(non singular matrix) ويل کېږي، که چېرې $|A|\neq0$ وي.

له دې امله هغه وخت يو مېټريکس د معکوس مېټريکس لرونکی دی چې:

1. مېټريکس مربعي وي.
2. ديټرمينانټ يې د صفر خلاف وي.

لومړی مثال: وښاياست چې $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ يو د بل معکوس دي.

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)(-7)+3(-2) & (-1)(-3)+3(-1) \\ 2(-7)+(-7)(-2) & 2(-3)+-7(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ليدل کېږي چې: $AB=BA=I$ دی، نو A او B يو د بل معکوس دي.

الحاقي مېټريکس(Ad joint of matrix): د 2×2 مرتبې الحاقي مېټريکس د پیداکولو لپاره د اصلي قطر د عناصرو ځایونه سره بدلوو او فرعي قطر د اشارې په بدلون سره لیکو، هغه نوی مېټريکس چې لاس ته راځي، له الحاقي مېټريکس (ad joint=adj) څخه عبارت دی، د مثال په ډول:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ A=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ K=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

هغه وخت یو مېټريکس معکوس مېټريکس لري چې دیټرمینانت یې د صفر خلاف وي، یعنې $|A|\neq 0$ وي. البته د بحث موضوع 2×2 مرتبې مېټريکس دی چې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\ Adj\ A \qquad |A|\neq 0$$

لومړی مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ وي، معکوس مېټريکس یې پیداکړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-18+10=-8\neq 0$

لیدل کېږي چې د A مېټريکس دیټرمینانت د صفر خلاف دی، نو د A مېټريکس معکوس مېټريکس لري.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{-8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

ازموینه:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

په عمومي ډول ویلی شو، د هر $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مېټريکس چې دیټرمینانت یې د صفر خلاف یعنې $|A|\neq 0$ وي، معکوس لري چې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې مېټريکسونو څخه کوم یو مېټريکس معکوس لري.

a) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

2. د لاندې مېټريکسونو معکوس مېټريکس په لاس راوړئ او وازموئ.

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $C=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

له معکوس مټریکس څخه په کاراخیستني د خطي معادلو د سیستم حل

آیا تر اوسه مو له معکوس مټریکس څخه په ګټه اخیتسنې د خطي معادلو د سیستم د حل په اړه فکر کړی دی؟

$$X = A^{-1} \cdot B$$

فعالیت

د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ په پام کې و نیسئ:

- د ضریبونو مټریکس، د مجهولینو مټریکس، د ضریبونو او مجهولینو مټریکس ولیکئ.
- هر مټریکس د معادلې په ډول ولیکئ.
- د لاس ته راغلې معادلې اطراف د ضریبونو د مټریکس په معکوس کې ضرب کړئ.

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

څرنګه چې A د سیستم د چپ لوري د ضریبونو مټریکس، B د ښي لوري د ثابتو عددونو ستوني مټریکس او X د مجهولو عددونو ستوني مټریکس دی، نو د A^{-1} په پام کې نیولو سره سیستم داسې حلېږي:

$$A\,X = B$$

$$A^{-1} \cdot A\,X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$

$$IX = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

لومړی مثال: له معکوس مېټریکس څخه په کار اخېستنې سره، د $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$ خطي دوه مجهوله سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ، $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ دی.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$$

څرنګه چې د A مېټریکس دیټرمینانت د صفر خلاف دی، نو د A مېټریکس معکوس لري نو سیستم د حل وړدی چې په لاندې ډول یې په لاس راوړو:

$$Adj\ A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 5-2\cdot 7 \\ -1\cdot 5+1\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15-14 \\ -5+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ ,\ x=1\quad ,\quad y=2$$

دویم مثال: له معکوس مېټریکس څخه په کار اخیستنې سره د دغه خطي معادلو $\begin{cases} 5x-2y=2 \\ 3x-\ y=3 \end{cases}$ سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\ ,\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ ,\quad A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5+6=1\ \Rightarrow\ |A|\neq 0$$

لیدل کېږي چې $|A| \neq 0$ دی، نو A معکوس مټریکس لري.

$$AdjA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \quad = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ -3\cdot 2 + 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6 \\ -6+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; x = 4 \quad , \quad y = 9$$

دریم مثال: د x او y په کومو قمیتونوکې لاندې معادلې په یو وخت کې صدق کوي.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases}$$

حل:

د یاد شوي سیستم حل د سیستم د ضریبونو د مټریکسونو له تشکیل څخه په لاس راوړو:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \; , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

څرنګه چې د A مټریکس دیټرمینانت صفر دی، نو د A مټریکس معکوس نه لري، په پایله کې ویلای شو چې سیستم حل نه لري.

پوښتنې

له معکوس مټریکس څخه په ګټې اخیستنې، د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه

Crammer's rule

آیا کولای شو، د ضریبونو د متریکس د دیټرمینانت او لــه مجهولینــو یعنــې د z, y, x ســره د متنــاظرو مټریکسونو د دیټرمینانت په واسطه د خطي معادلو د سیستم حل پیدا کړو؟

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

د خطي درې مجهوله معادلو سیستم په پام کې نیسو او د ضریبونو مټریکس یې په A سره ښیو:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

کولای شو د y, x او z قیمتونه له لاندې اړیکو څخه په لاس راوړو، په داسې حال کې چې $|A| \neq 0$ وي.

$$X = \frac{|A_x|}{|A|} \quad , \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} \quad , \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

په پورتنیو اړیکو کې $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ په ترتیب سره د y, x او z اړوند متناظرو مټریکسونو دیټرمینانتونه دي. د هغوی د محاسبې لپاره په لاندې ډول کړنه کوو، د سیستم زیات شوي مټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array}\right)$$

د $|A_x|$ د محاسبې لپاره د لومړی ستون د x ضریبونو په ځای څلورم ستون(هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو، د 3×3 مرتبې مټریکس دیټرمینانت په لاس راوړو او د $|A_y|$ د محاسبې لپاره د دویم ستون د y ضریبونه په ځای د څلورم ستون هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي ځای پر ځای کوو او د 3×3 مرتبې د مټریکس دیټرمینانت محاسبه کوو.او د $|A_z|$ د محاسبې لپاره دریم ستون د z ضریبونو په ځای څلورم ستون ځای په ځای کوو او د 3×3 مرتبې مټریکس دیټرمینانت قیمت په لاس راوړو.

فعالیت

- له پورتنیو معلوماتو څخه په ګټې اخیستنې سره $|A_x|$ ، $|A_y|$ او $|A_z|$ پیدا کړئ.

لومړی مثال: د $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ سیستم حل د کرامر په طریقه په لاس راوړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-(-6)=1+6=7\neq 0$$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دي؛ نو سیستم حل لري.

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3-(-6)}{7}=\frac{3+6}{7}=\frac{9}{7}$$

$$x=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{7}=\frac{2-6}{7}=-\frac{4}{7}$$

دويم مثال: لاندې درې مجهوله سيستم د کرامر په طريقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 3x-2y+2z=-4 \\ x+3y+z=5 \\ 2x+2y-z=11 \end{cases}$$

حل:

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} =-9-4+4-12-6-2 \\ =-21-8=-29\neq 0 \end{array}$$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دئ نو له دې امله سيستم حل لري.

$$|A_x|=\left|\begin{array}{ccc|cc} -4 & -2 & 2 & -4 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 11 & 2 & -1 & 11 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} =12-22+20-(66-8+10) \\ =10-68=-58 \end{array}$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_y|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -4 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 11 & -1 & 2 & 11 \end{array}\right| \begin{array}{l} =-15-8+22-(20+33+4) \\ =-23+22-57=-58 \end{array}$$

$$y=\frac{|A_y|}{A}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_z|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 11 & 2 & 2 \end{array}\right| =99-20-8-(-24+30-22)$$

$$=71+16=87$$

$$z=\frac{|A_z|}{A}=\frac{87}{-29}=-3$$

میزان:

د x, y او z په لاس راغلي قیمتونه په اصلي سیستم کې وضع کوو:

$$3(2)-2(2)+2(-3)=6-4-6=-4 \quad \Rightarrow \quad -4=-4$$
$$2+3(2)-3=2+6-3=8-3=5 \quad \Rightarrow \quad 5=5$$
$$2(2)+2(2)-(-3)=4+4+3=11 \quad \Rightarrow \quad 11=11$$

فعالیت

د گرامر په طریقې د لاندې معادلو سیستم حل په لاس راوړئ.

$$\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

پوښتني

د لاندې معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+2y-z=0 \\ 2x+ay+2z=0 \end{cases}$$

د معادلو د سیستم حل دګوس ($Gouse$) په طریقه

آیا کولای شو له متریکس څخه په کار اخیستنې سره

د x, y او z مجهول قیمتونه پیدا کړو؟

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

دګوس په طریقه د معادلو د سیستم د حل لپاره د ضریبونو متریکس او ثابت قیمتونه لیکو وروسته په سطرونو او ستونونو، باندې لومړنی عملیو باندې د جمع، تفریق، ضرب او تقسیم سرته رسوو، یا سطرونه او ستونونه په یو سکالر کې ضربوو چې په پایله کې دوه مجهوله له منځه ځي او دریم مجهول محاسبه کېږي ، وروسته د نورو مجهولونو قیمت په لاس راوړو، د متریکس سطرونه په $R_1, R_2, R_3, \ldots\ldots$ ښیو:

لومړی مثال: لاندې د خطي معادلو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

حل:د ضریبونو متریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{لومړی سطر منفي دوم سطردتفریق حاصل په دویم سطر کې لیکو.}]{R_1 - R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{دویم سطر په(-1) کې ضرب بدلون په دویم سطر کې لیکو.}]{R_2 \cdot (-1) \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow y=2\,, \quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ x+2(2)=5 \Rightarrow x=5-4 \Rightarrow x=1 \end{array}$$

پاملرنه: $R_1 - R_2 \to R_2$ په دې معنا چې له دویم سطر څخه لومړي سطر تفریق شوی او په دویم سطر کې بدلون لیکل شوی دی.

$R_2(-1) \to R_2$ داسې مفهوم لري چې دویم سطر په (-1) کې ضرب شوی او په دویم سطر کې لیکل شوی دی.

فعالیت

- د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

دویم مثال: د لاندې درې مجهوله معادلو سیستم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+2z=11 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$$

حل: لومړی د سیستم د مجهولینودضریبونو او ثابتو عددونو متریکس لیکو:

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په لومړی پړاو کې د x ضریب په دویم سطر کې له منځه وړو. داسې چې لومړی سطر په -3 کې ضرب د دویم سطر له دوه چند سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په دویم گام کې لومړی سطر په -2 کې ضرب له دریم سطر سره جمع او په دریم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right)$$

په دریم پړاو کې د y ضریب له دریم سطر څخه حذفوو، داسې چې دویم سطر په -8 کې ضرب د دریم سطر له 7 چند سره جمع او په دریم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{-8R_2+7R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & -105 \end{array}\right)$$

له دریم سطر څخه کولای شو، د z قیمت په لاس راوړو:

$$-35z=-105 \Rightarrow z=3$$

د z قمیت په دویم سطر کې وضع او د y قیمت په لاس راوړو:

$$-7y+7z=7 \Rightarrow -7y+21=7 \Rightarrow -7y=-14 \quad , \quad y=2$$

په دریم پړاو کې د y او z قیمتونه په لومړي سطر کې ابږدو او x په لاس راځي.

$$2x+3y-z=5 \Rightarrow 2x+3\cdot 2-3=5 \Rightarrow 2x+3=5$$

$$2x=5-3=2 \quad , \quad x=1$$

د خطي معادلو د سیستم حل عبارت دی له: $(x,y,z)=(1,2,3)$

امتحان: لاسه ته داغلي قیمتونه د معادلو په سیستم کې وضع کوو.

$$2\cdot 1+3\cdot 2-3=5 \Rightarrow 2+6-3=5 \quad , \quad 5=5$$

$$3\cdot 1+2+2\cdot 3=11 \Rightarrow 3+2+6=11 \quad , \quad 11=11$$

$$4\cdot 1-2(2)+3=3 \Rightarrow 4-4+3=3 \quad , \quad 3=3$$

دریم مثال: د لاندې خطي معادلاتو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$2x_1+4x_2+6x_3=18$$

$$4x_1+5x_2+6x_3=24$$

$$2x_1+7x_2+12x_3=40$$

حل:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right) \xrightarrow[-2R_1+R_2\to R_2]{\text{لومړی پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{\text{دویم پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2+R_3\to R_3]{\text{دریم پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

لیدل کېږي چې په لاس راغلی متریکس کې د x_2 , x_1 او x_3 ضریبونه په دریم سطر کې صفر دي، په داسې حال کې چې په یاد شوي سطر کې ثابت عدد 10 دی او دا غیر ممکن دی چې($x_1=x_2=x_3=0=10$) نو سیستم حل نه لري.

فعالیت

د لاندې معادلو سیستم حل او میزان کړئ.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

پاملرنه: که چېرې د خطي معادلو په سیستم کې یو له مجهولینو څخه موجود نه وي، د هغه ضریب صفر په پام کې نیسو، وروسته د خطي معادلو د ضریبونو او د ثابتو مقدارونو متریکس تشکیلوو:

پوښتنې

د لاندې خطي معادلو سیستمونه د گوس په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ -3y = -6 \end{cases}$$

د شپږم ټولګي مهم ټکي

د مټريکس تعريف: يوه ګڼېځ عددونه يا توري چې په سطري او ستوني ډول په يوه مستطيلي جدول کې ځای پر ځای شوي وي. د مټريکس(Matrix) په نامه يادېږي.

د مټريکسونو ډولونه:

- **سطري مټريکس**: هغه مټريکس چې يوازې يو سطر ولري.
- **ستوني مټريکس**: هغه مټريکس چې يوازې يو ستون ولري.
- **صفري مټريکس**: هغه مټريکس چې ټول عناصر يې صفرونه وي.
- **مربعي مټريکس**: هغه مټريکس چې د سطرونو او ستونونو شمېر يې سره برابر وي.
- **مساوي مټريکسونه**: دوه مټريکوسونه، هغه وخت سره مساوي دي چې ټول عناصر يې يو په يو سره برابر او مساوي وی.
- قطري مټريکس هغه مټريکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، قطر ي مټريکس بلل کېږي.
- **سکالر مټريکس**: هر قطري مټريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره برابر وي، سکالري مټريکس بلل کېږي.
- **واحد مټريکس**: په هر سکالري مټريکس کې که د اصلي قطر عناصر د 1 عدد وي، واحد مټريکس بلل کېږي.

په مټريکسونو باندې لومړني عمليات:

- **د مټريکسونو جمع او تفريق**: د مټريکسونو جمع او تفريق هغه وخت امکان لري چې:

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} \pm (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n} = (C_{ij})_{m\times n} = C_{m\times n}$$

د مټريکسونو د جمعې او تفريق خواص:

1) $A+B=B+A$

2) $A-B\neq B-A$

3) $(A\pm B)\pm C = A\pm(B\pm C)$

4) $A+0=0+A=A$

5) $A+(-A)=-A+A=0$

په مټريکس کې د سکالر ضربول: که $K\in IR$ او $A=(a_{ij})_{m\times n}$ وي، نو:

$$KA = K(a_{ij})_{m\times n} = (C_{ij})_{m\times n} = C_{m\times n}$$

په مټريکس کې د سکالر ضرب خواص:

a) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

b) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

c) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

د دوو مټريکسونو ضرب: د دوو مټريکسونو ضرب هغه وخت ممکن دی چې د لومړي مټريکس د ستونونو شمېر، د دويم مټريکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي، که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ وي، نو:

$$A\cdot B = (a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p} = (C_{ij})_{m\times p} = C_{m\times p}$$

يعني د دوو متريكسونو د ضرب حاصل هغه دريم متريكس دی چې د سطرونو شمېر يې له لومړي متريكس سره او د ستونونو شمېر يې له دويم متريكس سره برابر وي.

د متريكسونو د ضرب خواص: که A او B دوه متريكسونه وي، نو:

1) $AB \neq BA$ 2) $(AB)C = A(BC)$

3) $A(B+C) = AB + AC$ 4) $I \cdot A = A \cdot I = A$

5) $K(AB) = (KA)B = A(KB)$

د يوه متريكس ترانسپوز متريكس: که د يوه $A_{m\times n}$ متريكس ستونونه په سطرونو او سطرونه په ستونونو بدل شي، هغه نوی متريكس چې لاسته راځي ،د ترانسپوز متريكس په نامه يادېږي. د A ترانسپوز متريكس په A^T سره ښيي.

مثلثي متريكس: که په يوه متريكس کې د اصلي قطر پورتني او يا ښکتني عناصر ټول صفرونه وي، نوموړی متريكس د مثلثي متريكس په نامه يادېږي.

متناظر متريكس: که د A يو متريكس له خپل ترانسپوز A^T متريكس سره برابر شي($A = A^T$) نو د A متريكس ته متناظر متريكس وايي.

ديترمينانت: که د A متريكس يوه حقيقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د متريكس له ديترمينانت څخه عبارت دی، او د $|A|$ يا $\det A$ په شکل سره ښودل کېږي.

د ديترمينانت خواص:

1. که د $A_{n\times n}$ متريكس د يوه سطر او يا ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو ديترمينانت يې صفر دی، يعني:
$$\det A = |A| = 0$$
2. که د ديترمينانت دوه سطرونه او يا دوه ستونونه سره برابر وي، نو ديترمينانت يې صفر دی. $|A| = 0$
3. که $A_{n\times n}$ متريكس د يوه سطر يا ستون عناصر د بل سطر يا ستون د عناصرو مضرب وي، نو ديترمينانت يې صفر دی. $|A| = 0$
4. د A متريكس او د A ترانسپوز متريكس ديترمينانتونه سره مساوي وي، يعني: $|A^T| = |A|$

د متريكسونو ضربي معکوس: د $A = (a_{ij})_{m\times n}$ مربعي متريكس په پام کې نيسو ،که چېرې د B مربعي متريكس داسې موجود وي چې $AB = BA = I$ ، په دې صورت کې د B متريكس د A د متريكس معکوس دی او د A د متريكس معکوس متريكس په A^{-1} سره ښيي: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

د خطي معادلو د سيستم حل:

- له معکوس متريكس څخه په ګټه اخيستنې د خطي معادلو د سيستم حل.
- د خطي معادلو د سيستم حل د کرامر په طريقه.
- د ګوس په طريقه د خطي معادلو د سيستم حل.

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کړی تاو کړئ.

1. که $|A|=3$ وي، نو $|A^{-1}|$ پیدا کړئ.

$a)\ \frac{1}{3}$ $\quad b)\ 9$ $\quad c)\ \frac{1}{9}$ $\quad d)\ 3$

2. که $A=\begin{pmatrix} 2m-3 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ معکوس منونکی متریکس وي، نو د m قیمت به څو وي؟

$a)\ m=1\,,\ \frac{1}{2}$ $\quad b)\ m\neq 1$ $\quad c)\ m=0$ $\quad d)\ m\neq 1\,,\ \frac{1}{2}$

3. که $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ وي، د x هغه متریکس په لاس راوړئ چې په دغه رابطه $Ax=A^{-1}$ کې صدق وکړي.

$a)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$ $\quad b)\ \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -25 & -16 \end{pmatrix}$ $\quad d)\ \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -25 & -12 \end{pmatrix}$

4. د $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ متریکس لاندې د $y=2x$ د خط بدلون منونکي خط پیدا کړئ.

a) د y محور $\quad$ b) د x محور $\quad$ c) $y+2x=0$ $\quad$ d) $y=0$

5. د x په کومو قیمتونو دغه دیترمینانت $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ صفر دی؟

$a)\ x=1,2$ $\quad b)\ x=3,1$ $\quad c)\ x=\frac{1}{2},3$ $\quad d)\ x=3,2$

6. د $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ دیترمینانت حاصل په لاس راوړئ.

$a)\ 29$ $\quad b)\ 39$ $\quad c)\ 19$ $\quad d)\ 9$

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 4\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}$ وي، لاندې محاسبې غوښتل شوې دي:

$a)\ 3A-2B \qquad b)\ -4A+3B$

2. فرض کړئ که $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\-1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 3\\2 & -1\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو AB او BA محاسبه کړئ

او وواياست چې $AB=BA$ دی.

3. لاندې مترېکسونه په پام کې ونيسي:

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\-2 & 2\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}$$

اشتراکي خاصيت، توزيعي خاصيت او د مترېکسونو ضرب د درو مترېکسونو لپاره وښاياست.

4. لاندې ديترمېنانت په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\1 & 0 & 2\\2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

5. د لاندې مترېکس معکوس مترېکس د الحاق(ad joint) په طريقه پيدا کړئ.

$$M=\begin{pmatrix}2 & -5\\3 & -9\end{pmatrix}$$

6. د لاندې خطي معادلو سيستمونه د کرامر په طريقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases}2x+y+z=6\\x-2y+2z=10\\3x-y-z=4\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}x_1-2x_2=4\\2x_1+4x_2=5\end{cases}$$

7. د لاندې خطي معادلو سيستمونه د گوس په طريقه حل کړئ.

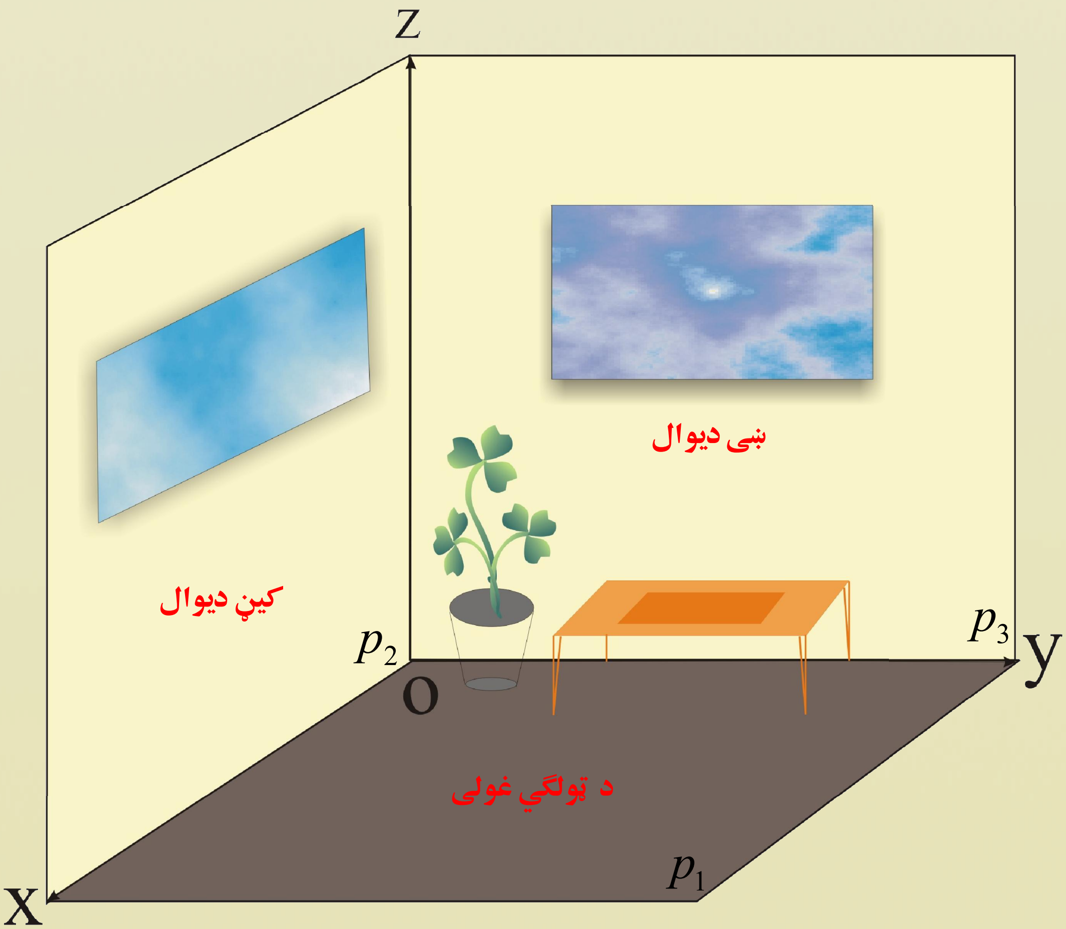
$$a)\ \begin{cases}2x-3y+3z=0\\3x+2y-5z=0\\5x-4y-2z=0\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}2x+3y-7=1\\2y+27=-2\end{cases}$$

8. د لاندې خطي معادلو سيستمونه د معکوس مترېکس په طريقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases}3x+y+1=0\\4x+3y-2=0\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}x-y=2\\x+2y=-1\end{cases}$$

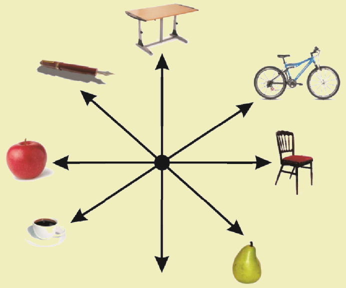
اووم څپرکی

وکتورونه


z
y
x
o
p_1
p_2
p_3
ښی دیوال
کيڼ دیوال
د ټولګي غولی

د وضيعه کميتونو په قايم سيستم کې وکتورونه

له يوه ټاکلي ټکي څخه د هغې شاوخوا بېلابېلو پرتو شيانو ته لنډه لاره په نښه کړئ.



تعريف

جهت لرونکي قطعه خط ته وکتور وايي، يا په بل عبارت هغه کميت چې هم مقدار لري او هم جهت لکه: قوه، فاصله، تعجيل او داسې نور. هر غشی د يو وکتور ممثل دی.

هغه وکتور چې مبداء يې د وضعيه کميتونو د قايم سيستم په مبداء کې پروت وي، د شعاع وکتور (Position Vector) په نامه يادېږي.

فعاليت

- د وضعيه کمياتو په قايم سيستم کې د شعاع وکتور داسې رسم کړئ چې د پای ټکی يې د $B\ (5,5)$ مختصات ولري.
- د پورتني راکړل شوي وکتور درې ممثل وکتورونه په راکړل شوو قايمو مخصاتو کې داسې رسم کړئ چې وکتور او شعاع وکتورونه يې سره توپير ولري.
- يو بل وکتور رسم کړئ چې له پورتني وکتور سره مساوي او د مخالف لوري او شعاع وکتور وي.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله ترلاسه کېږي.

پايله: په يوه مستوي او په فضا کې هر ممثل وکتور د خپل شعاع وکتور په اندازه وي، لکه:

1. د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه هغه وخت مساوي بلل کېږي، چې اوږدوالي يې مساوي $(|\vec{a}|=|\vec{b}|)$ موازي او د يو جهت لرونکی وي.
2. که چېرې يو وکتور $\vec{AB}=0$ وي، په دې صورت کې د $\vec{AB}$ وکتور صفري وکتور (Zero Vector) بلل کېږي.

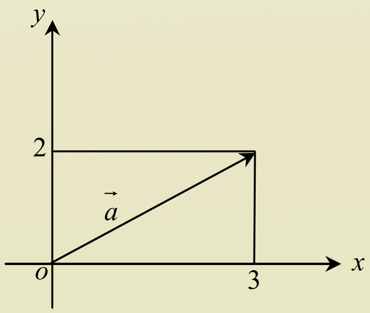
3. دوه وکتورونه هغه وخت مخالف یا منفي بلل کېږي چې اوږدوالی یې مساوي او جهت یې مخالف وي، د بېلګې په توګه:

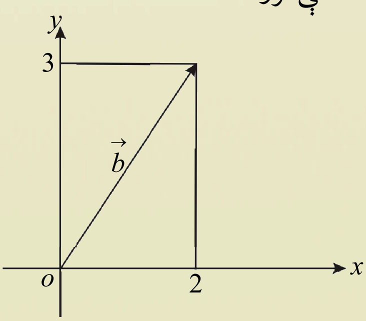
که $\vec{OA}=\vec{a}$ وي، نو $\vec{AO}=-\vec{a}$ دی، په داسې حال کې چې $(|\vec{OA}|=|\vec{AO}|)$ وي.

تعریف: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې یو وکتور په ستوني شکل داسې ښودل کېږي $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ په داسې حال کې چې a_x د x پرمحور وضعیه کمیت او a_y د y پرمحور د $\vec{a}$ وکتور فاصله او ترتیب ښیي.

لومړی مثال: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ او $\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ وکتورونه وښایاست؟

حل: د پورتني تعریف له مخې لرو:





یــادونه: د یو وکتور د ښودلو لپاره یوه مستوي په دې خاطر کارول کېږي، چې د قایم مختصاتو په سیستم کې د یو ټکي د ښودلو لپاره د مختصاتو په سیستم کې یوازې یو ځای شته، په داسې حال کې چې په مستوي کې د یو وکتور د ښودلو لپاره چې هماغه وکتور په مستوي کې ځای نیولی شي، بې نهایت ځایونه شته.

پوښتني

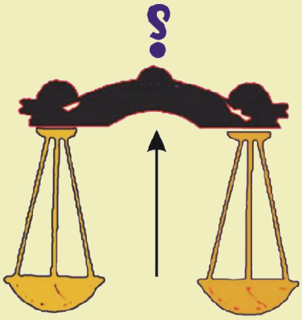
1. د هغو وکتورونو لپاره چې په لومړي مثال کې ورکړل شوي دي، مطلوب دي:

a. د هر یوه وکتور درې ممثل وکتورونه رسم کړئ.

b. دواړه وکتورونه د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم کړئ.

c. د هغوی مخالف وکتورونه کوم وکتورونه دي؟

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی

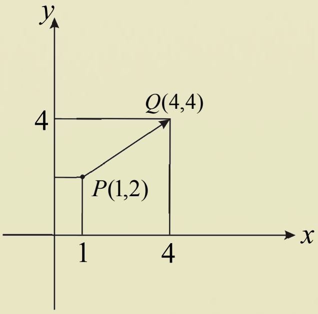


د تلي دوه هم وزنه پلې په پام کې نیسو، چې د یو شاهین په دواړو خواوو کې تړل شوي دي. د تلې د شاهین په لاس کې نیولو لپاره کوم ټکی وټاکو چې په نیولو یې د تلي پلې تعادل غوره کړي؟

فعالیت

د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د لاندې شکل په څېر $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ ټکې په پام کې ونیسئ:

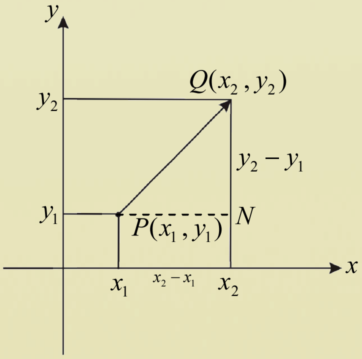
- د $\vec{PQ}$ د وکتور اوږدوالی څومره دی؟



- د $\vec{PQ}$ د منځني ټکي وضعیه کمیتونه څومره دي؟

د پورتني فعالیت له پای څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

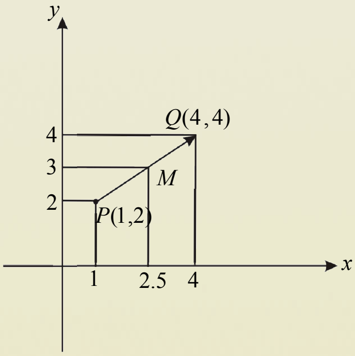
پایله: د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور د هرو دوو اختیاري ټکو لپاره چې $P(x_1\,,y_1)$ مبداء او $Q(x_2\,,y_2)$ انجام دی په دې صورت کې وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ سره ښیو، د $P\overset{\Delta}{Q}N$ قایم الزاویه مثلث په پام کې نیولو سره د $|\vec{a}|$ د وکتور اوږدوالی عبارت دی، له: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y^2}$



- د $\vec{PQ}$ منځنی ټکی عبارت دی، له:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x_1+x_2}{2}\\[2ex]\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$$

لومړی مثال: د $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ؟



حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+4}{2}\\\frac{2+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{6}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\3\end{pmatrix}$$

نو د منځني ټکي وضعیه کمیت له $M=\begin{pmatrix}2.5\\3\end{pmatrix}$ څخه عبارت دی او د P او Q د دوو ټکو د واټن د پیداکولو لپاره د فیثاغورث د قضیې په پام کې نیولو سره لرو:

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{a_x{}^2+a_x{}^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

دویم مثال: د $A(2,4)$ او $B(5,5)$ د ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ.

حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2+5}{2}\\\frac{5+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.5\\4.5\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

پوښتنې

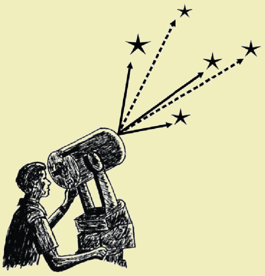
د لاندې ورکړ شوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکي پیدا کړئ.

i) $B(2,7)$, $A(3,4)$

ii) $N(5,1)$, $M(1,5)$

iii) $Q(8,8)$, $P(1,8)$

وکتورونه په سطح او فضا کې



د تلسکوپ پـه واسطه د ستورو د تګلوري لیدل پـه فضا کې ځانګړې وکتورونه ښيي.

د یـوې سطحې پـرمخ د وکتورونـو لپـاره یـوه بېلګـه راوړلای شئ؟

فعالیت

د لاندې شکل له مخې د وضعیه کمیاتو د قایم سیستم او د $IR^2=\{(x,y)\ /\ x,y\in IR\}$ سټ په پام کې نیولو سره لاندې فعالیت سرته ورسوئ.

- د وضعیه کیماتو په سیستم کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه یې (x,y) دی، په مستوي کې وټاکئ.
- د $\vec{u}$ یو شعاع وکتور چې وضعیه کمیتونه یې $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ دي، د وضعیه کمیتونو په سیستم کې وښیئ.
- په مستوي کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه یې (x,y) دي، په مستوي کې لـه $\vec{u}$ یـو وکتـور سره څه توپیر لري چې وضعیه کمیتونه یې $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ وي؟
- د $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ دوه اختیاري وکتورونه او $a\in IR$ یو سکالر لپاره په هندسي توګه د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې په جلا جلا ډول وښیئ، چې:

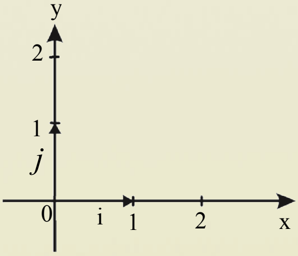
i) $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ (د جمعې قاعده)

ii) $a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\end{pmatrix}$ (دسکالري ضرب قاعده)

تعریف: د هغو ټولو مرتبو جوړو سټ چې د پورته قاعدې په څېر د جمعې او سکالري ضرب قاعدې پـرې تطبیق وي، د IR^2 (مستوي) د وکتورونو فضا او یا په مستوي کې د وکتور په نامه یادیږي.

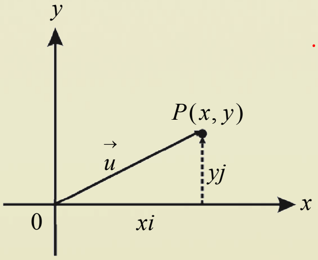
له پورتني فعالیت او تعریف څخه لاندې پایله لاسته راځي:

پایله: د دوو ځانګړو وکتورونو $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په پام کې نیولو سره چې اوږدوالی یې یو واحد او $|\vec{i}|=|\vec{j}|$ دي. $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ هر اختیاري وکتور لپاره لرو:



$$\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$



$\vec{i}$ او $\vec{j}$ واحد وکتورونه دي چې د x او y محورونو په امتداد پراته دي.

واحـد وکتـور(unit victor): هغه وکتور دی چې طول یې یو واحد او د مختصې د جهت د تزاید لپاره ترې کار اخلي.

لومړی مثال: که $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ وي، د لاندې وکتورونو قیمت پیدا کړئ.

(i): $\vec{u}+\vec{v}=?$ (ii): $4\vec{u}+2\vec{v}=?$ (iii): $\vec{u}-\vec{v}=?$

(iv): $\vec{u}-\vec{u}=?$ (v): $|\vec{u}|=?$

حل:

$$i)\quad \vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\\-3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}$$

$$ii)\quad 4\vec{u}+2\vec{v}=4\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+4\\-12+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}=8\vec{i}-2\vec{j}$$

$$iii)\quad \vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2\\-3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}=-\vec{i}-8\vec{j}$$

$$iv)\quad \vec{u}-\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$$

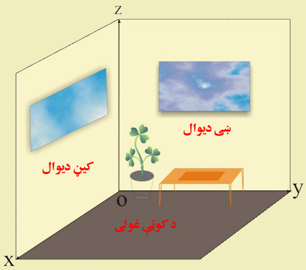
$$v)\quad |\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

پوښتنه

1. که $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ وي، $\vec{u}+2\vec{v}$، $\vec{u}-2\vec{v}$ او $2\vec{u}+4\vec{v}$ پیدا کړئ.

په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات

که د ټولګي په فضا کې يو ټکی وټاکئ آيا داسې يوه د حل لاره شته چې د ټکي واټن نسبت د ټولګي غولي او مجاور ديوال ته وټاکو؟



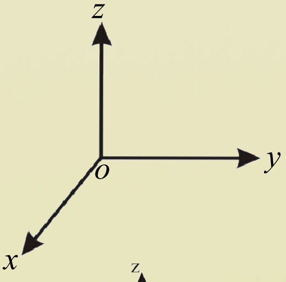
تعريف

درې بُعدي IR^3 فضا د ټولو هغو مرتبو درې ګونو (x, y, z) څخه عبارت دی چې په لاندې ډول تعريفيږي:

$$IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x, y, z) / x, y, z \in IR\}$$

هغه درې مستويګانې p_3, p_2, p_1 چې دوه په دوه يو په بل عمود دي، د درې بُعدي فضا د مختصاتو مستويګانې بلل کيږي.

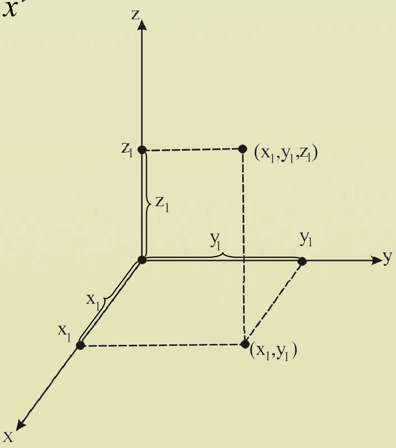
د دغو مستويګانو د دوه په دوه ګډ فصل درې قايمې زاويې جوړوي چې هغه د درې بُعدي فضا قايم مختصات بولي. د درې بعدي فضا قايم مختصات داسې نوموي چې که يو تن ودريږي، هغه محور چې د ليدونکي د تنې په لور دی، د z محور او هغه محور چې د ليدونکي د ليد په لور دی د y محور او هغه محور چې د ليدونکو د ښي لاس په لور پروت دی، د x محور دی او د دغو درې واړو محورونو د تقاطع ټکی له O ټکي څخه عبارت دی. چې د قايمو مختصاتو مبداء ښيي.



په درې بعدي فضا کې د يوه ټکي مختصات له هغه واټن څخه عبارت دي چې له درې واړو مستويګانو څخه يې لري.

د ټکي واټن د مختصاتو له مستوي ګانو څخه په $|x|$، $|y|$ او $|z|$ سره ښيي.

په درې بعدي فضا کې د يوه ټکي د ځای ټاکل:



د درې بعدي فضا په قايمو مختصاتو کې د $A(x_1, y_1, z_1)$ ټکي د ټاکلو لپاره د هرې مختصې په اروند محور باندې د مختصې د علامې په پام کې نيولو سره فاصلې جلا کوو، لومړی د x له محور څخه موازي خط د y له محور سره رسموو، د تقاطع ټکی يې چې (x, y) دی، پيدا او وروسته له ياد شوي ټکي څخه يو بل خط موازي د z له محور سره رسموو، په پايله کې د تقاطع ټکی په لاس راځي چې په دې ترتيب د ټکي ټاکل په درې بعدي فضا کې بشپړيږي.

يادونه: په درې بعدي فضاکې د x, y او z مختصو منفي جهتونه د نومړو محورونو له امتداد یافته ځخه عبارت دی.

فعالیت

- د $A(2,4,3)$ او $B(-2,-3\ ,3)$ ټکي د درې بعدي فضا قایم سیستم کې وښایاست.

په فضاکې د $P(x,y,z)$ یو ټکی چې د $\vec{OP}$ وکتور له $\vec{u}$ سره مساوي دی، د IR^2 د فضا په شان په درې بعدي فضا یا IR^3 کې هم د جمعې او سکالري ضرب قاعدې د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دواړو وکتورونو لپاره او د a سکالر لپاره صورت نیسي:

$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$$ (د جمعې قاعده)

$$a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\\az\end{pmatrix}$$ (د سکالري ضرب قاعده)

لومړی مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$ وي، $\vec{v}+\vec{w}$ ، $\vec{v}-\vec{w}$ ، $2\vec{w}$ او $\left|v-2\vec{w}\right|$ پیدا کړئ.

حل: لرو چې:

$$i)\quad \vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\1+4\\3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$ii)\quad \vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\1-4\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$$iii)\quad 2\vec{w}=2\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}$$

$$iv)\quad \left|\vec{v}-2\vec{w}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2+2\\1-8\\3-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\-7\\3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+(-7)^2+3^2}$$

$$=\sqrt{16+49+9}=\sqrt{74}$$

يادونه:

A- كېداى شي سطحې ته ورته درې واحد وكتورونه $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ چې:

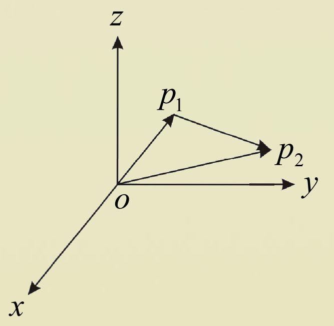
$1=|\vec{k}|=|\vec{j}|=|\vec{i}|$ دي، په درې بعدي فضا كې په پام كې نيول شوي، د z, y, x محورونو په امتداد د واحد

وكتورونو په نامه ياد كړو. د جمعې د قاعدې په پام كې نيولو سره د $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ هر اختياري وكتور د واحد

وكتور په پام كې نيولو سره په لاندې توګه ښودلى شو:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

B- **په فضا كې د دوو ټكو ترمنځ واټن**: كه چېرې $\vec{OP_1}$ او $\vec{OP}_2$ د $P_1(x_1, y_1, z_1)$ او $P_2(x_2, y_2, z_2)$ د ټكو دوه شعاع وكتورونه وي، په دې توګه لرو:



$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p_1p_2}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$$

نو د P_1 او P_2 د ټكو ترمنځ د واټن د پيداكولو لپاره لرو:

$$|\vec{P_1P}_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

پورتنى فورمول د P_1 او P_2 ټكو ترمنځ واټن ښيي.

C- كه په درې بُعدي فضا كې د يو ټكي واټن له مبدأ څخه مطلوب وي يعنې $(x_1, y_1, z_1)=(0,0,0)$ او $(x_2, y_2, z_2)=(x, y, z)$ وي؛ نو د ټكي واټن له مبدأ څخه د لاندې فورمول په واسطه پيداكولاى شو:

$$|\overrightarrow{p_1p_2}|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

دویم مثال: که $\vec{a}=(-5\ ,\ 4\ ,\ 5)$ وی؛ نو د نومړي شعاع وکتور طول څو دی؟

حل: د شعاع وکتور موقعیت ته په کتو سره چې د شعاع وکتور مبدأ د وضعیه کمیتونو په مبدأکې پرته ده د C جز له فورمول څخه ګټه اخلو:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2++y^2+z^2}=\sqrt{(-5)^2+4^2+5^2}=\sqrt{25+16+25}=\sqrt{66}$$

دریم مثال: که $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{v}=4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=6\vec{i}-9\vec{j}-3\vec{k}$ راکړل شوی وي.

ومومئ $ii)\ \left|\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}\right|=?$ $\qquad i)\ \vec{u}+2\vec{v}=?$

حل: لرو چې:

$$i)\quad \vec{u}+2\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+2(4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k})$$

$$=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+8\vec{i}+12\vec{j}+4\vec{k}=10\vec{i}+15\vec{j}+5\vec{k}$$

$$ii)\quad \vec{u}-\vec{v}-\vec{w}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}-4\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}-6\vec{i}-9\vec{j}+3\vec{k}=-8\vec{i}-12\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\left|\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}\right|=|-8i-12j+2k|=\sqrt{(-8)^2+(-12)^2+2^2}=\sqrt{64+144+4}=\sqrt{212}$$

پوښتنې

1. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو جهت ته واحد وکتور پیداکړئ.

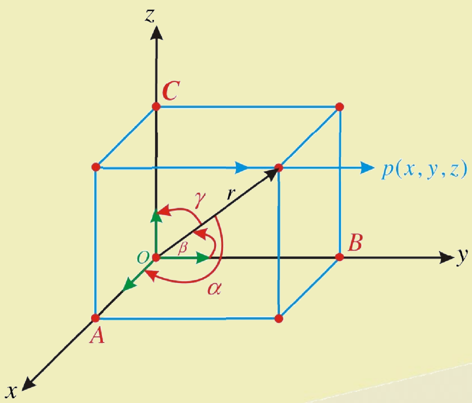
2. په دریم مثال کې چې $\vec{u},\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونه راکړل شوي دي په پام کې ونیسئ او لاندې پوښتنو ته ځوابونه ومومئ.

$a)\ 2\vec{u}-6\vec{v}+4\vec{w}=?$ $\qquad b)\ |\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}-2\vec{w}|=?$

3. $\vec{u}$ او $\vec{v},\vec{v}$ او $\vec{w},\vec{w}$ او $\vec{u}$ وکتورونو ترمنځ واټن پیداکړئ.

4. د هغه وکتور واحدونه پیداکړئ چې د $\vec{u},\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونو په جهت پراته وي؟

د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه



تعریف: که د $\vec{r}$ شعاع وکتور د قایمو مختصاتو له محورونو سره په ترتیب د β, α او γ زاویې جوړې کړي په دې صورت کې شکل ته په کتو سره لیکلای شو:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$$
$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_x$$
$$\overrightarrow{OB} = \vec{r}_y$$
$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_z$$

کولای شو د $\vec{r}$ د وکتور جهت کوساینونه په لاندې ډول ولیکو:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\cos\beta$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\gamma$$

د پورتنیو اړیکو چپ لوری مربع کوو او وروسته یې سره جمع کوو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}$$

پوهېږو چې $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ دی، نو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

فعالیت

که چېرې په یوه درې بعدي فضا کې $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ وکتور چې د صفر خلاف دی، ورکړ شوی وي، په داسې حال کې چې د پورته شکل په شان β, α او γ په ترتیب سره د $\vec{v}$ د وکتور زاویې او $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ واحد وکتورونه وي، په دې ډول لاندې فعالیت اجرا کړئ.

- آيا ويلاي شئ چې د α, β او γ زاويې په کومه اندازه تحول کوي؟
- آيا له پورتنيو زاويو څخه يوه يې منفي کيداى شي؟
- که چيرې له زاويو څخه يوه يې صفر شي، د وکتور د موقعيت په هکله څه ويلاى شئ؟
- د $\vec{v}$ د وکتور د جهت زاويو د کوساين لپاره يوه ګډه اړيکه پيدا کړئ؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايلې ته رسيږو:

پايله: که په فضاکې د $\vec{v}$ يو وکتور، چې صفر نه وي، يعنې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$، راکړل شوى وي، نو د جهت د

زاويو د کوساينونو ترمنځ لاندې اړيکې شته: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

د پورتنى پايلې د ثبوت لپاره پوهيږو، چې: $\left|\vec{v}\right|=\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|=\left|x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

له بلې خوا د جهت د واحد وکتور يا د $\vec{v}=\vec{OP}$ مسير عبارت دى، له: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\begin{pmatrix}\frac{\vec{v}_x}{|\vec{v}|}\\\frac{\vec{v}_y}{|\vec{v}|}\\\frac{\vec{v}_z}{|\vec{v}|}\end{pmatrix}$

پوښتنې

1. که $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ وي، پيدا کړئ؟

$a)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=?$ $\qquad b)\ v-3\vec{w}=?$ $\qquad c)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

2. د α اندازه داسې پيدا کړئ چې د $\alpha\,\vec{i}+(\alpha+1)\,\vec{j}+2\vec{k}$ وکتور اوږدوالى مساوي په 3 وي.

د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

د دوو وکتورونو د سکالر ضرب حاصل د انجینری او فزیک په زده کړه کې په کارېږي او د هغو ترمنځ زاویې په پام کې نیولو سره له یو سکالري کمیت سره مساوي دی، که چېرې: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ وي، نو $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ دی، که نه؟

تعریف

$\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي په مستوي یا فضا کې په پام کې نیسو.

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ سکالري ضرب حاصل په $\vec{u}\cdot\vec{v}$ سره ښیو، چې حاصل یې عبارت دی، له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه جوړه کړې او $(0\leq\theta\leq\pi)$ سره دي.

فعالیت

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل په پام کې نیولو سره وښایاست، چې:

i) $\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1$

ii) $\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{i}=0$

iii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

iv) که $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د صفر خلاف او $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ وي، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

- د دوه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$ وکتورونو لپاره د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ضرب حاصل د $a_1a_2+b_1b_2$ له سکالري قیمت سره مساوي دی.

- په فضا کې د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ د ضرب حاصل مطلوب یا غوښتل شوی په دې ډول چې $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وي.

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل لپاره له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لاسته راځي.

پایله: که $\vec{u}$، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ درې اختیاري وکتورونه او c یو حقیقي عدد وي، نو لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v} \quad (i$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u} \quad (ii$$ (د ضرب تبادلوي خاصيت يا ځانګړتيا).

$$\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\,\vec{v}+\vec{u}\,\vec{w} \quad (iii$$ (په جمع د ضرب توزيعي خاصيت).

$$(c\cdot\vec{u})\vec{v}=c(\vec{u}\cdot\vec{v}) \quad (iv$$ د ضرب توزيعي خاصيت.

لومړی مثال: که $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ دوه وکتورونه د صفر خلاف وي، د سکالري ضرب حاصل يې پيدا کړئ.

حل: د تعريف له مخې لرو چې:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$

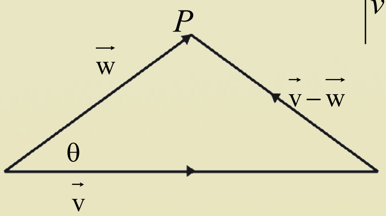
$$=a_1\cdot a_2(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_1b_2\cdot(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\cdot\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\cdot\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\cdot\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\cdot\vec{k})$$

$$+c_1\cdot a_2(\vec{k}\cdot\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\cdot\vec{k})=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

دويم مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ د يو مستوي دوه وکتورونه وي، وښاياست چې:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=x_1x_2+y_1y_2$$

حل: د تعريف له مخې لرو: $|\vec{v}-\vec{w}|^2=|\vec{v}|^2+|\vec{w}|^2-2\vec{v}\cdot\vec{w}\cdot\cos\theta$



څرنګه چې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ ، $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ په پايله کې $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}$ دي، نو د پورتنی اړيکی څخه لرو:

$$|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2=|x_1^2+y_1^2||x_2^2+y_2^2|-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow -2x_1x_2-2y_1y_2=-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta \,/\div -2$$

$$\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta=\vec{v}\cdot\vec{w}$$

دریم مثال: که چېرې د $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ او $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ وکتورونه درکړ شوي وي، د سکالري د ضرب حاصل يې پيدا کړئ.

حل: د فورمول په پام کې نيولو سره لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=i^2+4j^2+k^2=1+4+1=6$$

څلورم مثال: وښاياست چې د $\vec{u}=2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ وکتورونه يو پر بل عمود دي.

حل: په دې هکله لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k})(4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k})=(2)(4)+(-4)(-3)+(5)(-4)$$
$$=8+12-20=0 \quad\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

څرنګه چې د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل مساوي په صفر شو، نو وکتورونه يو پر بل عمود دي.

پنځم مثال: د α قيمت داسې پيدا کړئ چې د $2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k}$ او $3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k}$ وکتورونه يو پر بل عمود وي.

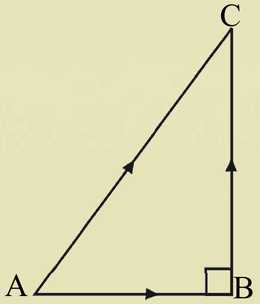
حل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو له عمود والي څخه دې پايلې ته رسېږو چې: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ دی، نو لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k})\ (3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k})=0 \;\Rightarrow\; 6+\alpha+5\alpha=0\ ,\ \alpha=-1$$

شپږم مثال: وښاياست چې د $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ او $3i-4j-4k$ وکتورونه د يو قايم الزاويه مثلث ضلعې دی.

حل: که $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ او $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ د مطلوب مثلث دوه ضلعې په پام کې ونيسو، نو دريمه ضلع يې د مثلث د وکتورونو د جمعې حاصل په پام کې نيولو سره چې د مثلث دريمه ضلع ټاکي عبارت دی له: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$

(چې د مثلث له دريمې ضلعې څخه عبارت دی) $3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$ اوس ښيو چې نوموړی مثلث قايم الزاويه دی، د دې لپاره د وکتوري ضرب حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ وي.



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\ (\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$
$$=(2)(1)+(-1)(-3)+(1)(-5)=2+3-5=0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$$

پوښتنې

1. وښایاست چې د $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ وکتور مرتسمونه د $\vec{k},\vec{j},\vec{i}$ واحد کتورونو په امتداد په ترتیب سره له b,a او c سره مساوي دي.

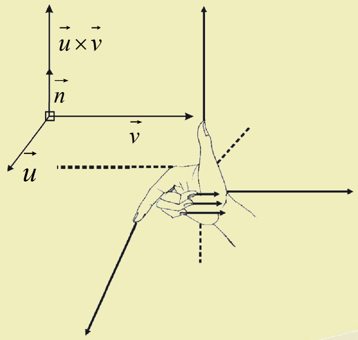
2. وښایاست چې هر $\overset{\Delta}{ABC}$ کې لاندې اړیکې وجود لري:

$i)\ a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ $\qquad ii)\ a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$

3. ثبوت کړئ چې: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

د وکتوري ضرب حاصل

The cross Product



د راکړل شوي شکل له مخې د کوم لاس (ښي یا کیڼ) په واسطه د $\vec{v}\cdot\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتورونه داسې وښیو چې $\vec{u}$ د ورغوي په جهت، $\vec{v}$ د ښنګل په جهت او $\vec{u}\times\vec{v}$ د ښي لاس د غټې ګوتې په لور واقع شي؟

تعریف

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، په پام کې نیسو. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو د وکتوري ضرب حاصل په $\vec{u}\times\vec{v}$ چې ($\vec{u}$ کرس $\vec{v}$ لوستل کیږي) عبارت دی، له: یعني د دوو وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې د دوی د مبدأ په ټکي عمود وي.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\theta)\,\vec{n}$$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ $(0\leq\theta\leq\pi)$ وکتورنو تر منځ زاویه او $\vec{n}$ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د وکتورونو په واسطه جوړه شوې مستوي له عمود واحد وکتور څخه عبارت دی، د ښي لاس قاعدې په واسطه (Right hand rule) ښودل کیږي.

د دوو وکتورونو وکتوري ضرب

مخکې له دې چې د دوو وکتورنو وکتوري ضرب توضیح کړو، لازمه ده چې د وکتورونو خطي ترکیب، وکتوري فضا، د وکتورونو خطي خپلواکي(استقلالیت) په لنډ ډول تر څېړنې لاندې ونیسو.

1. **د وکتورونو خطي ترکیب**: د یوه سټ د وکتورونو د سکالري مضربونو مجموعه د همغه سټ د وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادیږي.

که $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\vec{a}_n$ د یوه سټ وکتورونه او $\alpha_1,\alpha_2,\ \dots\ ,\alpha_n\in IR$ سکالرونه وي، په دې صورت کې د $\vec{a}$ وکتور په داسې حال کې چې $\vec{a}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$ وي، $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\vec{a}_n$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادیږي.

لومړی مثال: که $\vec{a}_1=2i+j-3k$ او $\vec{a}_2=i+2j+2k$ وکتورونه راکړل شوی وي، د هغوی خطي ترکیب په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې $\alpha_1=5$ او $\alpha_2=2$ وي.

حل:

$$\vec{a} = 5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 = 5(2i + j - 3k) + 2(i + 2j + 2k)$$
$$= 10i + 5j - 15k + 2i + 4j + 4k$$
$$= 12i + 9j - 11k$$

د $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

دویم مثال: که $\vec{a}_1 = (2,3)$ او $\vec{a}_2 = (5,1)$ وکتورونه راکړل شوي وي، وښایاست چې د $\vec{a} = (6\ ,-5)$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو خطي ترکیب دی.

حل: خرنګه چې $\alpha_1\ ,\ \alpha_2 \in IR$ سکالرونه دي، نو:

$$\vec{a} = (6\ ,-5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,1)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1\ ,3\alpha_1) + (5\alpha_2\ ,\ \alpha_2)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1 + 5\alpha_2\ \ ,3\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 \ \ = -5 \end{cases}$$

له پورتني سیستم څخه د α_1 او α_2 قیمتونه په لاس راوړو:

$$\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases}$$

$$6\alpha_1 + 15\alpha_2 = 18$$
$$-6\alpha_1 \pm 2\alpha_2 = \mp 10$$

$$13\alpha_2 = 28 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{28}{13}$$

$$2\alpha_1 + 5\frac{28}{13} = 6$$

$$2\alpha_1 + \frac{140}{13} = 6 \Rightarrow 2\alpha_1 = 6 - \frac{140}{13} = \frac{78 - 140}{13}$$

$$2\alpha_1 = \frac{-62}{13} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{62}{26} = -\frac{31}{13}$$

$$\vec{a} = (6\ ,-5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,\ 1)$$

$$\vec{a} = (6\ ,-5) = -\frac{31}{13}(2\ ,\ 3) + \frac{28}{13}(5\ ,\ 1)$$

یعنې که α_1 او α_2 قیمتونه په $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورنوکې ضرب شي، په پایله کې د $\vec{a}$ وکتور په لاس راځي، نو ومولیدل چې $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونه د $\vec{a}$ د وکتور خطي ترکیب دی.

د طبعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په واسطه د یوه وکتور ښودل:

که په دوه بعدي، درې بعدي او بلاخره په n بعدي فضاکې د شعاع وکتورونه راکړل شوي وي. کولای شو هغه د واحدو وکتورونو د ضریبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول وښیو.

a) که دوه بعدي فضا وي $(x_1 , x_2) = (x_1 , 0) + (0 , x_2)$

نو: $= x_1(1 , 0) + x_2(0 , 1)$

که $e_1 = (1 , 0)$ او $e_2 = (0 , 1)$ وي.

نو: $(x_1 , x_2) = e_1 x_1 + e_2 x_2$

او په بل ډول یې هم لیکلای شو:

$$(x , y) = (x , 0) + (0 , y) = x(1 , 0) + y(0 , 1)$$
$$= xe_1 + ye_2 = xi + yj$$

b) که فضا درې بعدي وي، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$(x_1 , x_2 , x_3) = (x , y , z) = (x_1 , 0 , 0) + (0 , x_2 , 0) + (0 , 0 , x_3)$$
$$= x_1(1 , 0 , 0) + x_2(0 , 1 , 0) + x_3(0 , 0 , 1)$$

څرنګه چې $e_1 = (1 , 0 , 0)$ ، $e_2 = (0 , 1 , 0)$ او $e_3 = (0 , 0 , 1)$ په درې بُعدي فضاکې واحد وکتورونه دي، نو:

$$(x_1 , x_2 , x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$
$$(x , y , z) = xi + yj + zk$$

c) په عمومي حالت کې که فضا n بعدي وي

$$(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) = (x_1 , 0 , \ldots , 0) + (0 , x_2 , \ldots , 0) + \ldots + (0 , 0 , \ldots , x_n)$$
$$= x_1(1 , 0 , \ldots , 0) + x_2(0 , 1 , \ldots , 0) + \ldots + x_n(0 , 0 , \ldots , 1)$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

په داسې حال کې چې $e_1 , e_2 , \ldots , e_n$ طبیعي واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو خطي خپلواکي: د $\vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \ldots , \vec{a}_n$ وکتورونه په یوه وکتوري ساحه کې خطي خپلواکي (خطي استقلال) لري، که چېرې دغه خطي ترکیب $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$ مساوي په صفر وي او همدارنګه $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ وي.

فعالیت

که $S = \{(1 , 0 , 0) , (0 , 1 , 0) , (0 , 0 , 1)\}$ وي وښایاست چې S خطي خپلواکي لري.

غیرې خپلواک خطي وکتورونه: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونه خطاً مربوط خطي غیر خپلواک یا خطي انحصار لري، که چیرې یوازې او یوازې $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ وي او کم ترکمه یو له ضریبونو د $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ څخه د صفر خلاف وي.

یادونه:

ددې لپاره چې د وکتورونو یو سټ په لاس راوړو چې خطي خپلواکي ولري، نو لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: د وکتورونو ترکیب په لاس راوړو او له صفر وکتور سره یې مساوي نیسو.

دویم پړاو: د وکتورونو د جمعې عملیه سرته رسوو.

دریم پړاو: د معادلاتو سیستم تشکیلوو.

څلورم پړاو: د معادلاتو سیستم د سکالرونو لپاره حلوو، په هغه صورت کې چې ټول سکالرونه صفر شي نو وایو چې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري او که چیرې له ټولو سکالرونو څخه کم ترکمه یو سکالر د صفر خلاف وي، نو وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

مثال: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونه په لاندې ډول راکړل شوې دي $\vec{a}_1 = (1,2,0)$, $\vec{a}_2 = (0,3,1)$, $\vec{a}_3 = (2,3,1)$ وښایاست چې $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ او $\vec{a}_3$ وکتورونه خطي خپلواکي لري او که نه؟

حل: د خطي خپلواکو وکتورونو له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو، ولیکو:

لومړی پړاو: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1(1,2,0) + \alpha_2(0,3,1) + \alpha_3(2,3,1) = 0$

دویم پړاو:

$$= (\alpha_1, 2\alpha_1, 0) + (0, 3\alpha_2, \alpha_2) + (2\alpha_3, 3\alpha_3, \alpha_3) = (0,0,0)$$
$$= (\alpha_1 + 0 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, 0 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)$$

دریم پړاو:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

څلورم پړاو: اوس د معادلاتو سیستم د α_1 ، α_2 او α_3 لپاره حلوو:

$\alpha_2 = -\alpha_3$

$2\alpha_1 + 3(-\alpha_3) + 3\alpha_3 = 2\alpha_1 - 3\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 = 0, \ \alpha_1 = 0$

$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$

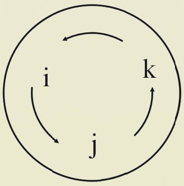
$0 + 2\alpha_3 = 0 \ \Rightarrow \alpha_3 = 0$

$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$

$0 + 3\alpha_2 + 0 = 0 \ \Rightarrow 3\alpha_2 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = 0$

خرنګه چې $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ دي، نو نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري.

فعالیت



د تعریف له مخې د ښي لاس د قاعدې په واسطه د $\vec{u}\times\vec{v}$ او $\vec{v}\times\vec{u}$ مسیر او یا جهت په مخامخ شکل کې وښیي.

- وښایاست چې $\vec{i}\times\vec{i}=0$ او $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ دی.
- د پورتنیو څېړنو له مخې د $\vec{j}\times\vec{j}$ ، $\vec{k}\times\vec{k}$ ، $\vec{j}\times\vec{k}$ او $\vec{k}\times\vec{i}$ وکتورونو د ضربونو حاصل په هکله څه ویلای شئ؟
- وښایاست چې: $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{u}=0$ دی.
- **په عمومي ډول ویلای شو چې د $\vec{j},\vec{i}$ او $\vec{k}$ وکتورونو د ضرب حاصل په دایروي ډول د لومړني او دویم وکتور د ضرب له حاصل څخه دریم وکتور، لکه: د ورکړل شوي دایرې په ښي لاس ته راځي.**

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاس ته راځي:

پایله: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي. د وکتوري ضرب له حاصل څخه او د ښي لاس د قاعدې په کارولو سره لرو:

i) $\vec{u}\times\vec{u}=0$

ii) $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$

iii) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$

iv) $\vec{u}\times(k\vec{v})=(k\vec{u})\times\vec{v}=k\,(\vec{u}\times\vec{v})\ ,\quad k\in IR$

د وکتوري ضرب د حاصل د تعریف له مخې د پورته پایلې ثبوت دې زده‌کوونکو ته پرېښودل شي.

لومړی مثال: که چېرې $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وکتورونه صفر نه وي، نو وښایاست چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\,\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\,\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\,\vec{k}$$

حل: د تعریف نه په ګټې اخیستنې سره لیکو، چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})\times(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$

$$=a_1a_2(\vec{i}\times\vec{i})+a_1b_2(\vec{i}\times\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\times\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\times\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\times\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\times\vec{k})$$

$$+c_1a_2(\vec{k}\times\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\times\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\times k)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\end{array}\right\} ,\quad \left.\begin{array}{l}\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\end{array}\right\} ,\quad \left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{i}=0\\ \vec{j}\times\vec{j}=0\\ \vec{k}\times\vec{k}=0\end{array}\right\}$$

$$=a_1b_2\cdot\vec{k}-a_1c_2\cdot\vec{j}-b_1a_2\cdot\vec{k}+b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\,\vec{j}-c_1b_2\cdot\vec{i}$$

$$=(b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\cdot\vec{j}+a_1b_2\cdot\vec{k})-(c_1b_2\cdot\vec{i}+a_1c_2\,\vec{j}+b_1a_2\cdot\vec{k}$$

$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}+(c_1a_2-a_1c_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_1&b_1&c_1\\ a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

دویم مثال: وښایاست چې د $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ لپاره د $\vec{a}\times\vec{b}$ حاصل له $(-\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k})$ سره مساوي دی.

حل: د لومړي مثال نه په ګټې اخیستنې سره پوهېږو، چې:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\times(4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=8(\vec{i}\times\vec{i})+4(\vec{i}\times\vec{j})-2(\vec{i}\times\vec{k})$$

$$+4(\vec{j}\times\vec{i})+2(\vec{j}\times\vec{j})-(\vec{j}\times\vec{k})+4(\vec{k}\times\vec{i})+2(\vec{k}\times\vec{j})-(\vec{k}\times\vec{k})$$

$$=0+4\vec{k}+2\vec{j}-4\vec{k}+0-\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{i}-0=-3\vec{i}+6\vec{j}$$

د مخلوط ضرب حاصل(درې ګوني ضرب) Triple Product

تعریف: د دوو یا څو وکتورونو د ضرب لپاره څو امکانه شته چې هر یو یې په لاندې ډول تر څېړنې لاندې نیسو:

i) د $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ دضرب حاصل.

د پورتنيو $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونو د ضرب حاصل چې په سکالري ډول ضرب شوی، يو سکالر دی. وروسته نوموړی سکالر د $\vec{c}$ په وکتور کې ضرب شوی چې له پايلې يې وکتور په لاس راځي دغه وکتور له $\vec{c}$ وکتور سره هم جهت دی.

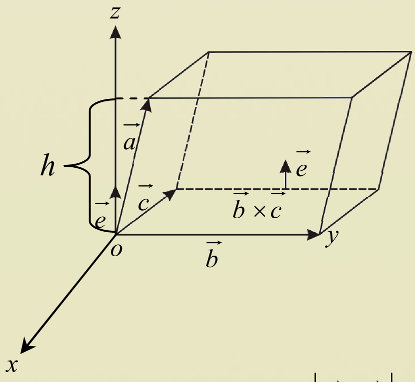
په پورتني ضرب کې لاندې قانون شته: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \neq (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} \neq (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$

د $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ وکتور جهت د $\vec{a}$ د وکتور هم جهت او د $(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ وکتور جهت د $\vec{b}$ د وکتور هم جهت دی.

ii) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

iii) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})$

iiv) $\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$



د $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ اړيکه د هغه متوازي السطوح له حجم څخه عبارت دی چې a, b او c د متوازي‌السطوح اضلاع دي، څرنگه چې په شکل کې ليدل کېږي $|\vec{b}\times\vec{c}|$ د متوازي-السطوح قاعده او h د متوازي‌السطوح جگوالی دی، نو له دې امله:

$$\text{د متوازي‌السطوح حجم} = v = |\vec{b}\times\vec{c}|(\vec{a}\cdot\vec{e}) = \vec{b}\,|\vec{a}\times\vec{c}|\,\vec{e}$$

$$v = \vec{b}(\vec{a}\times\vec{c}) = |\vec{b}\times\vec{c}|\,h$$

تطبيقاتي مسئلې:

1- که چېرې $\vec{a} = 4\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b} = 2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ وکتورونه راکړل شوي وي، هغه وکتور مطلوب غوښتل کيږي چې پر دواړو وکتورونو عمود وي، آيا دغه وکتور يوازنی وکتور دی، که څنگه؟ دليل مو څه دی؟

حل: د تېر لاس د قاعدې په کارولو پوهېږو چې د $\vec{a}\times\vec{b}$ وکتور پر هغو وکتورونو عمود دی، نو لرو:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$$

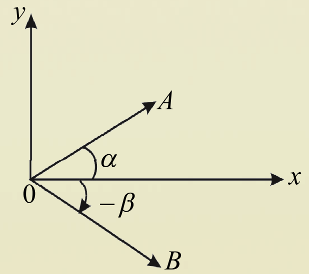
نو د $\vec{a}\times\vec{b}=7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$ وکتور پر $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونه پوازیني عمود وکتورونه دي، بلکې $\vec{b}\times\vec{a}$ وکتور

هم د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په وکتورونو عمود دي، یعنې لرو:

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-1&2\\4&3&1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+6\vec{j}+10\vec{k}=-(7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k})=-\vec{a}\times\vec{b}$$

2- ثبوت کړئ چې د α او β د هرې اختیاري زاویې لپاره

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin B$.



حل: که $\vec{OA}$ او $\vec{OB}$ دوه وکتورونه د x, y په مستوي کې داسې راکړل شوي دي چې د x له محور سره د α او β زاویې جوړې کړي، له شکل څخه پوهېږو: $A\hat{O}B=\alpha+\beta$

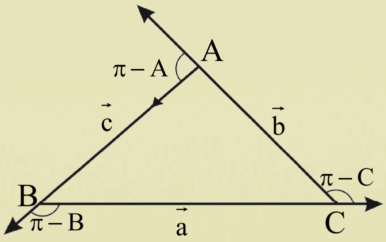
له بلې خوا پوهېږو چې $\vec{OA}=\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}$ او $\vec{OB}=\cos(-\beta)\,\vec{i}+\sin(-\beta)\,\vec{j}$ نو لرو:

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j})\times(\cos\beta\,\vec{i}-\sin\beta\,\vec{j})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\cos\alpha&\sin\alpha&0\\\cos\beta&-\sin\beta&0\end{vmatrix}$$

$$=\vec{k}(-\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta)=-\vec{k}\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow\ \left|\vec{OA}\right|\times\left|\vec{OB}\right|=\left|-\vec{k}\right|\cdot\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$$

3- په یوه کیفي مثلث کې وښیئ، چې: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$



حل: فرضوو چې د لاندې شکل له مخې د $\vec{a}$، $\vec{b}$ او $\vec{c}$ وکتورونه د $\overline{BC}$، $\overline{CA}$ او $\overline{AB}$ د مثلث د ضلعو په امتداد راکړل شوي دي، نو لرو: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

$$\Rightarrow\ \vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}\qquad\ldots\ldots\ldots\ (i)$$

که د مساوات دواړه خواوې په $\vec{c}$ وکتور کې وکتوري ضرب کړو، لاسته راځي، چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}=-\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{c})=-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$

$$\vec{c}\times\vec{c}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a} \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|=\left|\vec{c}\times\vec{a}\right|$$

دپورتینو مساواتو د تعریف له مخې داسې لیکلای شو:

$$\left|\vec{b}\right|\ \left|\vec{c}\right|\sin(\pi-A)=\left|\vec{c}\right|\ \left|\vec{a}\right|\ \sin(\pi-B)$$

$$\Rightarrow\quad \left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\sin A=\left|\vec{c}\right|\ \left|\vec{a}\right|\sin B \quad\Rightarrow\quad b\sin A=a\sin B\ \ /\div ab$$

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a} \quad .... \quad (ii)$$ یا $$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A} \quad .... \quad (ii)$$

د پورته په څېر که چېرې د (i) د رابطې دواړه خواوې په $\vec{b}$ وکتور کې په وکتوري ډول ضرب شي، لاسته راځي چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}=-\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$$

$$(\vec{b}\times\vec{b})+(\vec{c}\times\vec{b})=\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{b}\times\vec{b}=0 \quad\Rightarrow\quad (\vec{c}\times\vec{b})=\vec{b}\times\vec{a}$$

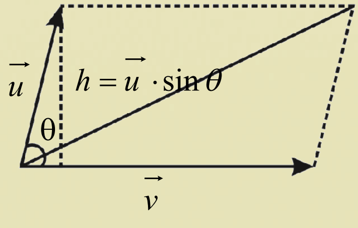
$$\left|\vec{c}\right|\left|\vec{b}\right|\sin A=\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|\sin C$$

$$c\sin A=a\sin C\ \ /\div ac$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C} \quad ..... \quad iii$$ یا $$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

د (ii) او (iii) معادلو له پرتلې څخه د ساین قضیه لاسته راځي: $$\frac{a}{SinA}=\frac{b}{SinB}=\frac{c}{SinC}$$

4- **د یوې متوازي الاضلاع مساحت:** د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي، د دوی ترمنځ زاویه د θ د لاندې شکل په څېر په پام کې نیسو. ګورو چې $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د متوازاي الاضلاع ضلعې دي چې د هغې د مساحت د پیدا کولو لپاره کولای شو، ولیکو:



ارتفاع × قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت

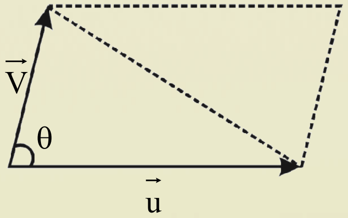
څرنګه چې: $\left|\vec{v}\right|$ = قاعده او $h=\left|\vec{u}\right|\sin\theta$ = ارتفاع ده

$\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin\theta=\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|$ = د متوازي الاضلاع مساحت

يعنې د يوې متوازي الاضلاع مساحت، د يوې متوازي الاضلاع د ضلعو د وکتوري ضرب له حاصل څخه عبارت دی چې د متوازي الاضلاع ضلعې هم دي.

پايله:څرنګه چې د يوه مثلث مساحت د متوازي الاضلاع مساحت نيمايي دی، نو د مثلث مساحت د لاندې شکل په پام کې نيولو سره عبارت دی، له:

$$\text{د مثلث مساحت} = \frac{1}{2}\ (\text{د متوازي الاضلاع مساحت}) = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$$



پوښتنې

1. که $\vec{a}_1 = t^2+t+2$, $\vec{a}_2 = 2t^2+t$ او $\vec{a}_3 = 3t^2+2t+2$ وي وښاياست چې نومړي وکتورونه خطي خپلواکي لري؟
2. وښاياست چې $\vec{a} = 2i+3j+4k$ او $\vec{b} = 4i+6j+8k$ وکتورونه يو له بل سره کوم ډول خطي اړيکه لري؟
3. د هغه مثلث مساحت پيدا کړئ چې راسونه يې د $A(1,-1,1)$ ، د $B(2,1,-1$ او $C(-1,1,2)$ وکتورونو په واسطه درکړل شوي وي. همدارنګه هغه واحد وکتور چې پر ABC مستوي عمود وي، مطلوب دي.
4. د هغه متوازي الاضلاع مساحت پيدا کړئ چې: د $P(0,0,0)$, $Q(-1,2,4)$ ، $R(2,-1,4)$ او $S(1,1,8)$ وکتورونو په واسطه ځانګړې شوي وي.
5. که $\vec{u} = 2i-j+k$ ، $\vec{v} = 4i+2j-k$ سره وي، د لاندې وکتورونو د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

   i) $\vec{u}\times\vec{u}$ ii) $\vec{u}\times\vec{v}$ iii) $\vec{v}\times\vec{u}$

د ښوونکي مهم ټکي

د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه: هغه کمیتونه چې هم جهت اوهم مقدار ولري وکتور نومېږي. هغه وکتورونه چې اوږدوالی یې مساوي او عین جهت ولري، یو له بله سره د ممثلو وکتورونو په نامه یادېږي. هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پرته وي شعاع وکتور (Position Vector) بلل کیږي. یو وکتور په مستوي کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ په څېر ښودل کیږي. چې a_x د x او a_y د y محور پرمخ له فاصلې او ترتیب څخه عبارت دي.

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی: که $P(x_1,y_1)$ وکتور مبداء او $Q(x_2,y_2)$ د پای ټکی د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور وي. په دې ډول $\vec{a}$ وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ ښيو او د $\overset{\Delta}{PQN}$ قایم الزاویه مثلث او $|\vec{a}|$ وکتور اوږدوالي له مخې لرو چې:

د P او Q ټکو ترمنځ واټن، $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ د $\vec{a}$ اوږدوالې د P او Q منځنې ټکی $M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x_1+x_2}{2}\\\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$ د $\vec{PQ}$ د منځنې ټکې کمیتونه یا مختصات دي.

واحد وکتور: هغه وکتور چې د راکړل شوی وکتور په عین جهت پروت او یو واحد اوږدوالی ولري، د واحد وکتور په نامه یادیږي.

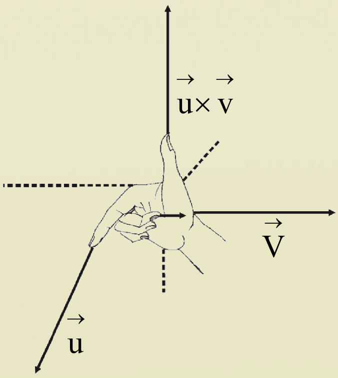
مثال: $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په قایم سیستم کې د x او y د مستوي د محورونو په جهت واحد وکتورونه دي، په داسې حال کې چې $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ په فضاکې د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د x، y او z محورونو په جهت واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو سکالري او وکتوری ضرب حاصل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د سکالري ضرب حاصل یې په مستوي او فضاکې عبارت دی له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,Cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاويه ده. او د وکتوري ضرب حاصل يې يو وکتور دي چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ په واسطه ښودل کيږي، عبارت دی، له: $\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|Sin\theta\cdot\vec{n}$

په داسې د حال کې چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ پر وکتورونو عمود دی او $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونه سره د ښي لاس قاعدې په واسطه تاکل کيږي.

د ښي لاس قاعده: که د شهادت ګوته په قايم ډول کږه شي، لکه د لاندې شکل په شان، په دې صورت کې د شهادت ګوته د $\vec{u}$ محور په جهت، د ځنګل په جهت د $\vec{v}$ محور او غټه ګوته د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور حاصل ضرب ښيي.



په فضا کې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب:

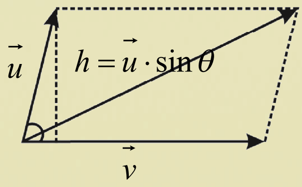
که $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ ورکړل شوی وي، په دې صورت کې وکتوري حاصل ضرب يعنې $\vec{a}\times\vec{b}$ عبارت دی له:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

مساحت او د وکتوري ضرب حاصل: د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د وکتوري ضرب قيمت يې د متوازي الاضلاع له مساحت څخه عبارت دی، چې د وکتورونو په واسطه په لاندې شکل کې تشکيليږي.

$|\vec{u}\times\vec{v}|=$ د متوازي الاضلاع مساحت



د څپرکي پوښتنې

1): که $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ وي:

a): $\vec{a}\cdot\vec{b}$ b): $\vec{b}\cdot\vec{a}$ مطلوب دی

2): که چېرې د $P(2,3)$ او $Q(6,-2)$ ټکي د $\vec{op}$ او $\vec{OQ}$ شعاع وکتورونو پای وي، په دې صورت کې د P او Q په مستوي کې د $xi+yj$ په څېر ولیکئ.

3): که چېرې $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ ، $C(-1,3)$ او $D(-2,2)$ درکړل شوي وي، د $\vec{AB}$ او $\vec{CD}$ وکتورونو حاصل جمع مطلوب ده.

4): که چیرې $A(2,5)$ ، $B(-1,1)$ او $C(2,-6)$ درکړل شوي وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{AB}=?$ $ii)\ 2\vec{AB}-\vec{CB}=?$ $iii)\ 2\vec{CB}-2\vec{CA}=?$

5): که چېرې $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ورکړل شوی وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ $ii)\ \vec{v}-3\vec{w}$ $iii)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

$iv)$: د $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ راکړل شوو وکتورنو په جهت واحد وکتورونه پیدا کړئ

6): د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ درکړل شوو وکتورونو لپاره سکالري ضرب حاصل د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ، $\vec{b}\cdot\vec{a}$ او وکتوري ضرب حاصل د $\vec{a}\times\vec{b}$ او $\vec{b}\times\vec{a}$ پیدا او دوه په دوه يې پرتله کړئ، که چېرې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په لاندې توګه وي:

$$i)\ \begin{cases}\vec{a}=2i+j-k\\ \vec{b}=i-j+k\end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases}a=i+j\\ b=i-j\end{cases}$$

$$iii)\ \begin{cases}\vec{a}=3i-2j+k\\ \vec{b}=i+j\end{cases} \qquad iv)\ \begin{cases}\vec{a}=-4i+j-2k\\ \vec{b}=2i+j+k\end{cases}$$

7): د هغو مثلثونو مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل کېږي:

$i): \quad P(0,0,0), \quad Q(2,3,2), \quad R(-1,1,4)$

$ii): \quad P(1,-1,-1), \quad Q(2,0,-1), \quad R(0,2,1)$

8): د هغه متوازي الاضلاع مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل شوی وي.

$i): \quad A(0,0,0), \quad B(1,2,3), \quad C(2,-1,1), \quad D(3,1,4)$

$ii): \quad A(1,2,-1), \quad B(4,2,-3), \quad C(6,-5,2), \quad D(-3.5,-4)$

$iii): \quad A(1,-1,1), \quad B(-1,2,2), \quad C(-3,4,-5), \quad D(-3,5,-4)$

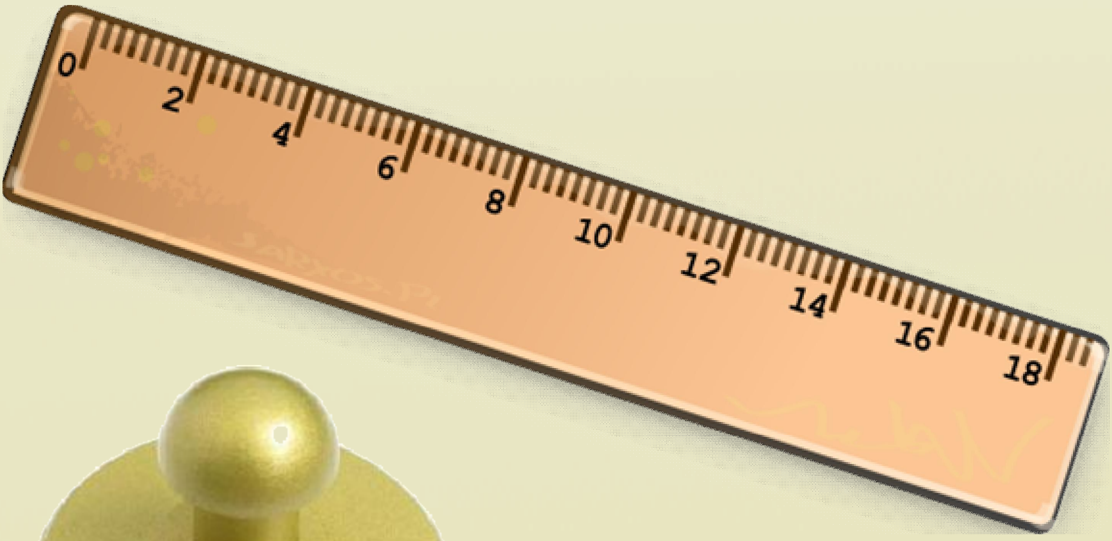
9): کوم وکتورونه عمود او کوم موازي دي؟

$i): \quad \vec{u} = 5i - j + k, \quad \vec{v} = j - 5k, \quad \vec{w} = -15i + 3j - 3k$

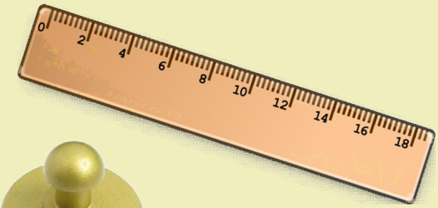
$ii): \quad \vec{u} = i + 2j - k\ , \quad \vec{v} = i + j + k, \quad \vec{w} = -\frac{\pi}{2}\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{j}$

اتم څپرکی

احصائیه



$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$



دبدلونونو ضریب

Coefficient Variations

که چېرې د یوې ټولنې تیتوالی په متر او د بلې ټولنې په کیلوګرام ښودل شوې وي. آیا فکر کولای شئ چې دغه دواړه تیتوالی په دواړو ټولنوکې د پرتلې وړ دي او که نه؟

$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

فعالیت

10 تنه زده کوونکي له خپل ټولګي څخه په تصادفي ډول وټاکئ؟

- د زده کونکو ونه او وزن تشخیص کړئ.
- د زده کوونکو د ونې او وزن واریانس او معیاري انحراف محاسبه کړئ.
- آیا فکر کولای شئ چې د دې دواړو متحولینو د تیتوالی د میزان پرتله د واریانس او معیاري انحراف له لارې امکان لري؟ ولې؟
- که چېرې معیاري انحراف په اوسط وویشل شي، نو په لاس راغلی مقدار یا عدد واحد به څه وي؟
- د بدلونونو یا تغییراتو ضریب یا نسبي تیتوالی داسې کارول کېږي، چې واریانس او معیاري انحراف هغه نه لري. یو له دغو کارونو څخه د دوو نا متجانسو ټولنو پرتله ده چې د یادولو وړ ده.

دبدلونونو یا تغییراتو ضریب چې په $C \cdot V$ ښودل کېږي عبارت له هغه خارج قسمت څخه دی، چې د معیاري انحراف پر اوسط باندې په لاس راځي اویو مطلق بې واحده عدد دی په لاس راځي یعنې:

$$\text{دبدلونونو یا تغییراتو ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}} \quad \text{یا} \quad C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

که د تغیراتو ضریب په 100 کې ضرب شي، د تحول ضریب په لاس راځي:

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

- د بدلون ضریب یوازې د مثبتو ډېټاوو لپاره تعریف شوې وي.
- که چېرې ټوله ډېټا سره برابره وي، د بدلون ضریب مساوي په صفر دی.
- که ټوله ډېټا په یو مثبت عدد کې ضرب شي، د بدلون ضریب تغیر نه کوي.

- که په ټوله ډېټا یو مثبت عدد ورزیات شي، د بدلون نوی ضریب چې په لاس راځي له لومړي ضریب څخه کوچنی دی.

لومړی مثال: د لاندې ډېټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ:

$$\{1,3,5\}$$

حل: د فورمول له مخې لیکلای شو:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+3+5}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$$S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{(1-3)^2+(3-3)^2(5-3)^2}{3}=\frac{4+4}{3}=2.67$$

$$S=\sqrt{2.67}$$

$$C\cdot V=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{2.67}}{3}=0.543$$

دویم مثال: د تصویري ټلویزوني لامپونو یو تولیدونکی دوه ډوله لامپونه A او B تولیدوي، په داسې حال کې چې د A متوسط عمر مساوي په 1495 او د B متوسط عمر مساوي په 1875 ساعته دی او معیاري انحرافونه یې په ترتیب سره 280 او 310 دي، تولیدوي.

د کوم یوه لامپ تصویر له پاسنیو ډولونو څخه د نسبي تیتوالي یا دبدلون ضریب قیمت زیات دی؟

حل: د فورمول له مخې لرو چې:

$$C\cdot V_A=\frac{S_A}{\bar{x}_A}=\frac{280}{1495}\cdot 100=18.7\%$$ د A لامپونو د بدلون ضریب

$$C\cdot V_B=\frac{S_B}{\bar{x}_B}=\frac{310}{1875}\cdot 100=16.5\%$$ د B لامپونو د بدلون ضریب

څرنګه چې $C\cdot V_A>C\cdot V_B$ څخه دی، له دې کبله د A لامپ ډېر تیتوالی لري، ولې ټېنګښت یې کم دی.

پوښتنې

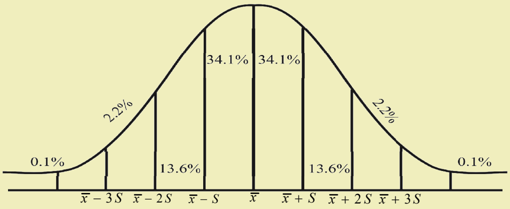
1. دلاندې ډېټا د بدلون یا تغیراتو ضریب حساب کړئ؟

1 3 4 5 6

2. که چېرې اوسط مساوي په 4 او معیاري انحراف مساوي په 6 وي، د بدلون یا تغیراتو ضریب څو دی؟

3. ستاسو د ټولګي د زده‌کوونکو د سن دبدلون ضریب 10 کاله وروسته څومره تغییر یا بدلون کوي؟ کمېږي او که ډېرېږي؟

په نورمال منحني کې تيتوالی

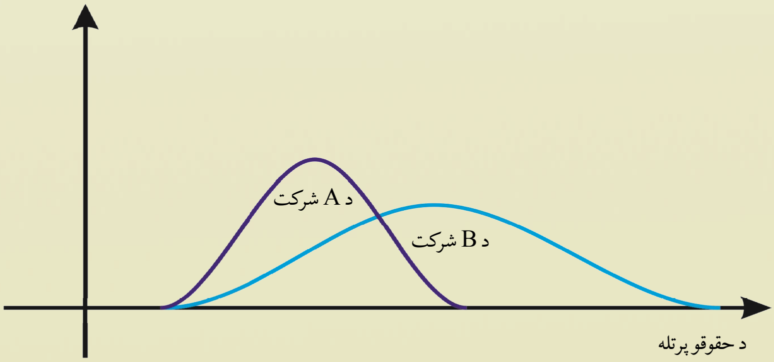


اوريدلي به مو وي چې وايي: يو ښه تصوير د زر کلميو ارزښت لري.

لاندې شکل ته وګورئ، د هغه په اړوند فکر او بحث وکړئ.

فعاليت

لاندې دوه ګرافونو د دوه A او B شرکتونو د حقوقو تأديه ښيي.



- کوم شرکت په اوسط ډول د حقوقو تاديه ډېره لري؟
- کوم شرکت د حقوقو د تأديې په ميزان کې خپلو کارمندانو ته لړه پراګنده ګي لري؟
- د دواړو شرکتونو د حقوقو تأديات سره پر تله کړئ.

لاندې ټکي د اوسط او معياري انحراف په نورمال منحني کې صدق کوي.

- که چېرې $\bar{x}$ اوسط او S معياري انحراف وي؛ نو 68% ډېلټني موارد په $(\bar{x}-S\ ,\ \bar{x}+S)$ فاصله کې يعني د اوسط په شا او خوا د معياري انحراف په فاصله کې ځای لري.
- 96% د پلټني موارد په $(\bar{x}-2S\ ,\ \bar{x}+2S)$ فاصله کې يعني د اوسط په شاوخوا د دوه معياري انحرافونو په فاصله کې ځای لري .
- 99% د پلټني موارد په $(\bar{x}-3S\ ,\ \bar{x}+3S)$ فاصله کې يعني د اوسط په دواړو خواوو دري معياري انحرافونو په فاصله کې قرار لري.

- په یوه نورمال منحني کې له $2S$ څخه ډېر انحراف غیر عادي او له $3S$ څخه زیات انحراف زیات غیر عادي شمېرل کېږي.

هغه ډېټا چې د $3S$ په اندازه له اوسط څخه فاصله یا واټن ولري، د تیتوالي یا تیتې ډېټا په نامه یادیږي.

مثال: که د یوې مؤسسې د کارکوونکو د معاش اوسط 12500 افغانۍ او معیاري انحراف یې مساوي په 700 افغانۍ وي نو:

الف: له نورمال توزیع څخه د فیصدي په ګټه اخیستنې سره، د ورکړل شوي معاش توزیع تشریح کړئ؟

ب: آیا ویلاې شئ چې د 1400 افغانیو معادل معاش یو غیر عادي معاش دی؟

د الف حل: لومړی د $\bar{x} \pm S$ ، $\bar{x} \pm 2S$ ، $\bar{x} \pm 3S$ قیمتونه په لاس راوړو.

فاصله د S له مخې	فاصله د افغانیو له مخې	فیصدي
$\bar{x} \pm S$	11800 – 13200	68%
$\bar{x} \pm 2S$	11100 – 13900	96%
$\bar{x} \pm 3S$	10400 – 14600	99.6 %

د ب حل: لومړی $\bar{x} - 1400$ په لاس راوړئ چې مساوي په 1500 کېږي؛ یعني 1400 افغانیو په اندازه 1500 افغانۍ له اوسط څخه ډېرې دي، که چېرې اوس دغه رقم په S ووېشو په لاس را ځي:

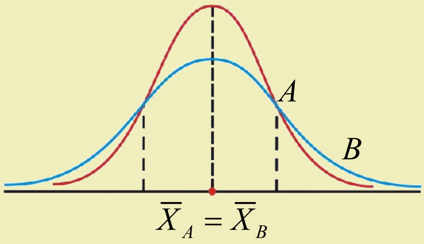
$$\frac{1500}{700} = 2.1$$

په دې ډول د 1400 افغانیو معاش غیر عادي معاش دی، ځکه چې د 2S له اندازې څخه زیات او له $\bar{x}$ څخه پورته دی.

پوښتنه

که چېرې 62.28% فیصده مشاهدات د $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$ په فاصله کې پراته وي، آیا ویلای شئ، چې 95.45% او 99.73% مشاهدات په کومه فاصله کې قرار لري؟ انټروالونه له نورمالي منحني سره وښایاست؟

دنورمالي توزيع دډول معيارونه



د مرکزي تيتوالي دوه معيارونه يو زيات شمېر د يوې احصايوي مجموعې اطلاعاتو ته په لنډ ډول انعکاس ورکوي.

ددې لپاره چې د يوې احصايوي مجموعې اطلاعات، تناظر او د مثبت او منفي اشارو لرونکي وي؛ نو له کوم ډول منحني څخه بايدګټه واخلو.

فعاليت

- په يو ه نورماله توزيع کې وسط، اوسط او د موډ معيارونه څه وخت سره مساوي دي؟
- که توزيع د اوسط په اطراف کې متناظره نه وي، د وسط اوسط او موډ د کميتونو په اړه څه فکر کوي؟
- که چېرې يوه توزيع متناظر ه وي؛ نو د اوسط او وسط تفاضل څو ده؟
- که چېرې دواړه توزيع ګانې يو شان اوسط او تناظر ولري؛ نو د جګوالي او تيتوالي له اړخه به څه وضعيت ولري؟

دتوزيع د ډول معيارونه په دوو لاندې حالتونو کې څېړل کېږي:

1- **د خمېدلو skewness معيار**: هغه توزيع چې د اوسط په دواړو خواوو کې متناظره نه وي، خمېدل نومېږي، چې په دوو لاندې ضريبونو ښودل کېږي.

الف: د خمېدلو ضريب: دا هغه معيار دی چې د خمېدلو د ميزان د ټاکلو لپاره کارول کېږي، چې په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum (x_i - \overline{x})^3}{S^3}$$

هغه عدد دی چې يوازې د پرتله کولو لپاره ترې کار اخېستل کېږي.

که $\alpha_3 = 0$ وي؛ د نو توزيع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي؛ توزيع مثبت خمېدل (possitve skewness)لري، يعنې ښي لوري ته خمېدګي لري.

او که $\alpha_3 < 0$ وي؛ توزيع منحني منفي خمېدل (negative skewness)لري يعنې کيڼ لوري ته خمېدګي لري.

که چېرې دکثرت جدول موجود وي، خمېدګي(عدم تناظر) يې د $\alpha_3 = \dfrac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^3}{S^3}$ فورمول په واسطه پيداکېږي. چې f_i فريکونسي ښيي.

ب: د پيرسون د خمېدلو ضريب: د پيرسون ضريب په لاندې ډول تعريف شوی دی.

$$S\,k_{(p)} = \frac{3(\overline{x} - med)}{S}$$

په متناظره توزيع کې د پيرسون د خميدلو ضريب مساوي په صفر دی. د پيرسون د خمېدلو د لو ضريب مثبت او منفي قيمتونه په ترتيب سره د توزيع د منحني مثبت يا منفي خمېدل ښيي.

2- **د پړسوب kurtosis معیار**: د پړسوب معیار ددې ښودونکی دی چې د توزیع یوه منحني څه وخت جګه او څه وخت ټیټوالي لري.

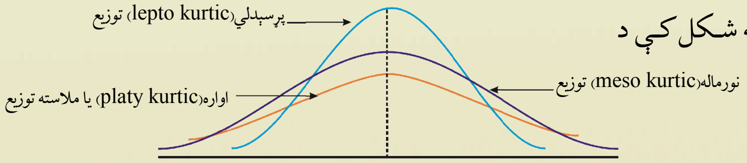
د پړسوب شاخص هغه معمولي معیار دی چې د یوې منحني د پړسېدلو د اندازه کولو لپاره په کار اچول کېږي او په لاندې ډول تعریف شوی دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^4}{S^4}$$

که د کثرت جدول په لاس کې ولرو، نو د پړسوب معیار فورمول $\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\overline{x})^4}{S^4}$ دی چې دلته f_i فریکونسي، x_i ډیټا او $\overline{x}$ د x_i اوسط او S معیاري انحراف دی.

د پړسوب معیار د توزیع په ځای او پراګنده ګي پورې اړه نه لري. دغه معیار د پرتله کیدو لپاره په کار لوېږي.

مثال: مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د α_4 ضریب د درې ډوله خمېدلو او پړسوب ډولونه چې په شکل کې د هغوی توزیع ښودل شوي ده ښیي.



حل: د نورمالي توزیع د پړسوب د درجې او میزان د پرتله کېدو لپاره لکه: یو سټنډرډ په کار اچول کېږي.

د نورمالي توزیع لپاره د α_4 قیمت مساوي په 3 دی، په داسې حال کې چې که چېرې α_4 له 3 څخه زیاته وي نظر نورمال منحني ته د منحني پړسوب زیات دی.

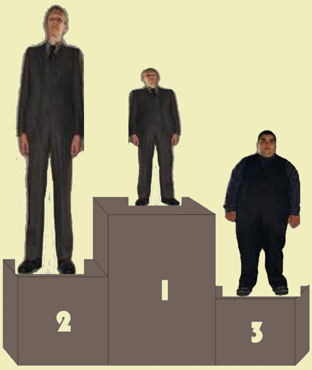
یا په بل عبارت یوه پړسیدلی توزیع چې څوکه لري او که چیرې α_4 له 3 لږ وي، نظر نورمالي منحني ته یې پړسوب کم دی چې د ملاستې یا اوارې توزیع په نامه یادېږي.

پوښتنې

د یوه ټولګي د زده‌کوونکو د احصایې د مضمون نمرې په لاند ې ډول ورکړ شوي دي، د پیرسون د پړسوب ضریب حساب کړئ.

نمرې	د زده‌کوونکو شمېر
40-50	4
50-60	6
60-70	10
70-80	4
80-90	4
90-100	2

څو متحوله ټولنې



که چیرې د خپل یوه ټولګیوال د ونې په اندازه وپوهیږئ، کولای شئ هغه ته په پام د هغه د وزن په اندازه پوه او په دې اړوند فکر وکړئ.

فعالیت

آیا په تیرو درسونو کې مو د اشخاصو د ونې او وزن په اړوند یو ځای مطالعه او څیړنه کړې ده.

- فکر کولای شئ چې د یوه سړي د ونې او وزن مقدار د یو متحول په توګه کولای شو چې وړاندې یې کړو؟
- که وغواړو چې د یوه ټولګي د زده کوونکو د ونې او وزن مقدار یو ځای وڅیړو، نو دغه یوه ټولنه ده.
- دخپلو 10 تنو ټولګیوالو ونې او وزن اندازه کړئ.
- لاس ته راغلي معلومات د مرتبو جوړو په توګه ولیکئ.
- هغه ټکي چې د مرتبو جوړو په مرسته په مستوي کې ټاکل کیږي، څه ډول شکل لري؟د یوه خط په واسطه یې وصل کړئ.
- آیا ویلای شئ هغه ټکي چې په مستوي کې وصل شي، کوم شکل لري؟

له پاسني فعالیت څخه پوهیږو چې د بحث موضوع، دوه ډوله متحولین دي. تر اوسه مو په تیرو درسونو کې داسې ټولنې پلټلي چې ټولنو په هغوی کې یوازې یو متحول درلوده اوس غواړو داسې ټولنې ولټوو چې دوه او یا له هغو څخه زیات متحولین ولري، دکار د آسانې لپاره معمولاً د یو یا څو متحولینو تر منځ درياضیکې اړیکې په مرسته د قایمو مختصاتو په قایم سیستم کې جوړیږي.

په لومړي ګام کې په دې منظور د معادلو د جوړیدو لپاره لازم معلومات را ټول شي او په دویم ګام کې را ټول شوي معلومات د ارزښت لرونکو متحولینو په څیر په یوه مستوي کې راټول او په نښه کیږي، هغه شکل چې د دغو ټکو له وصلیدو څخه لاس ته راځي، مونږ ته یو ګراف را ښیي.

مثال: یو متخصص د غذایي رژیم یو ډول تأثیر په یو شمیر موږکانو څیړلی دی. په دې ډول یې د هر موږک لومړنی وزن اندازه کړی او بیا یې د عملیې په تطبیق پیل کړي چې په پای کې یې بیا د موږکانو وزن اندازه کړی چې لاندې معلومات په لاس راغلی دي: $(2,4)\,,(3,5)\,,(1,7)\,,(2,3)\,,(1,8)$

په دې ډول لومړی مختصه د موږک لومړنی او دویمه مختصه د موږک وزن دغذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته ښيي.

- معلومات په يوه سطري او ستوني جدول کې ترتيب کړئ؟
- که چېرې ډېټا د يوې ټولنې په څېر وګڼل شي، نو دغه ټولنه به څو متحولين ولري؟

حل: لاندې سطري جدول په پام کې نيسو:

د موږکانو شمير	1	2	3	4	5
د موږکانو لومړنی وزن	1	2	1	3	2
د غذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته د موږکانو وزن	8	3	7	5	4

لاندې ستوني جدول په پام کې نيسو.

د موږکانو شمېر	د موږکانو لومړنی وزن	د غذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته د موږکانو وزن
1	1	8
2	2	3
3	1	7
4	3	5
5	2	4

پورتني ډېټا يوه دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

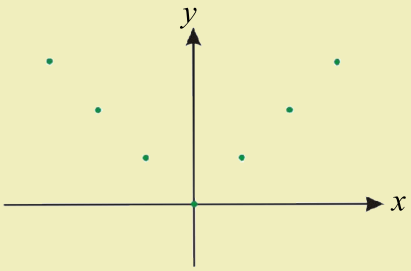
پوښتنه

د زراعتي محصولاتو دلوړوالي لپاره فکتورونه، لکه: اوبه، کود، د کود ډول، لمر او د خاورې ډول موثر ګڼل کېږي، آيا ويلی شئ چې په دغه ټولنه کې لږ تر لږه له څو ډوله متحولينو سره سروکار لرئ؟

د تيتوالي ګراف

Scatter diagram

مخامخ شکل ته په پام ، هغه ټکي چې په مستوي کې په نښه شوي دي، د مرتبو جوړو په ډول ترتيب او رياضيکي معادله يې وليکئ:



فعاليت

لاندې مرتبې جوړې ورکړل شوي دي:

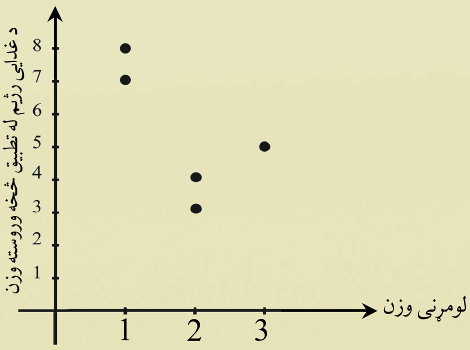
(1,2) (2,3)   (3,4) (4,5)

- د ورکړل شوو مرتبو جوړو ګراف په دقيق ډول رسم کړئ.
- مشخص شوي ټکي سره ونښلوئ او رياضيکي معادله يې پيدا کړئ.
- په لاندې ډول د دغو ډېټا د هر يوه، دويمه مختصه په لاندې ډول بدلوو.
- د هر ټکي لپاره يوه سکه پورته وغورځوئ، که شېر راغله په y يو واحد اضافه او که خط راغله له y څخه يو واحد کم کړئ، نو د لاس ته راغلو ټکو يا تغييراتو ګراف رسم کړئ.
- دغه عمليه څو ځلې تکرار، خو دا ځل کله چې قيمتونه زيات يا کموي، بدلون مه ورکوئ په x او y پورې تړلي قيمتونه څنګه تغير کوي؟

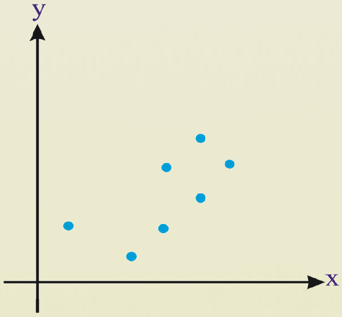
مثال: لاندې مرتبې جوړې چې پر موږکانو دغذايي رژيم تأثيراتو څخه مو په لاس راوړي دي، په پام کې ونيسئ: (2,4) (3,5) (1,7) (2,3) (1,8)

دغه مرتبې جوړې د مخامخ شکل په څېر په يوه مستوي کې ښودل شوي دي.

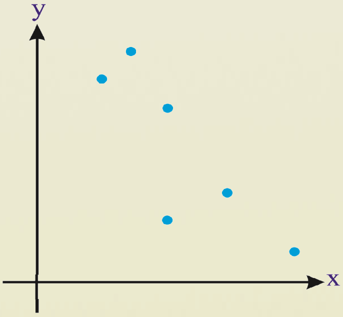
پورتنی ګراف چې د موږکانو وزن راښيي، د هغو پاشلو ټکو مجموعه ده چې په مستوي کې ده چې د اړوندې ډېټا په اندازه کېدلو په يوه دوه متحوله ټولنه کې د مختصاتو په سيستم کې لاسته راځي.



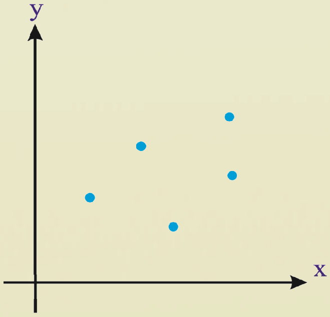
مثلاً: لاندې ګرافونه په پام کې ونیسئ:



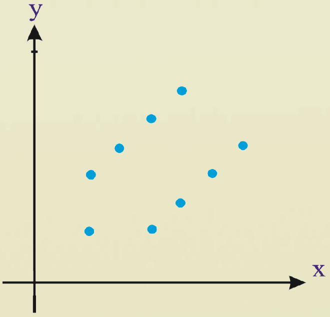
(الف)



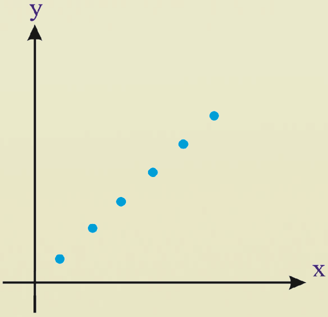
(ب)



(ج)



(د)



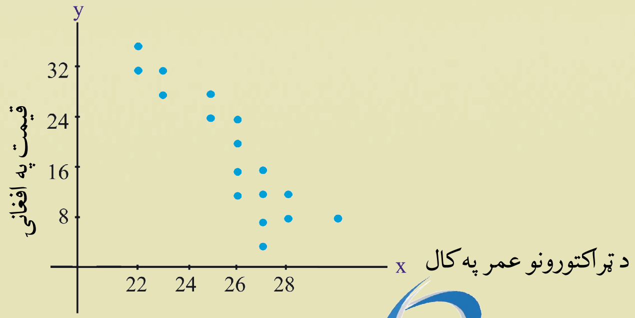
(هـ)

د(الف) په ګراف کې لیدل کېږي چې که چیرې د x قیمتونه زیات شي؛ نو د y قیمتونه هم زیاتېږي، خو د (ب) په ګراف کې بر عکس د x د قیمتونو په زیاتوالي د y قیمتونه کمېږي.

د(ج) په ګراف کې د x په قیمت کې تغییرات هیڅ ډول اطلاع د y دبدلونونویه اړوند نه ورکوي ځکه د x قیمت په درلودلو سره په ډېر دقت سره په دې ګراف کې د(الف) او (ب) ګرافونو پـه پرتلـه زیاتـه ده، د (هـ)پـه ګراف کې د y د قیمت حدس په ډېرې پاملرنې صورت مومي.

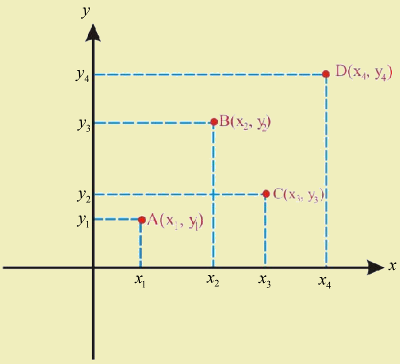
پوښتنې

لاندې ګراف دیو شمېر ټراکتورونو عمر راښیي، آیا ددې دوو متحولینو تر منځ کومه اړیکـه یـا ارتبـاط وینـي؟ توضیح یې کړئ.



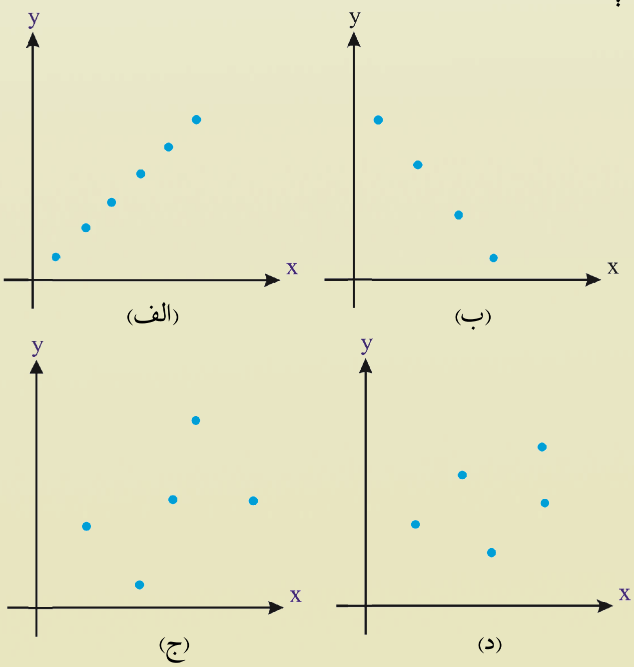
پیوستون او دپیوستون ضریب

د A,B ,C او D ټکي لکه: مخامخ شکل راکړل شوي دي، آیا شوني ده چې ټکي په یوه مستقیمه کرښه سره وصل شي، ولې؟



فعالیت

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ:



- د (الف) او (ب) په شکلونو کې کولای شو چې د y متحول د هغې کرښې په مرسته چې له دغو ټکو تېرېږي وټاکو.
- د (الف) او (ب) په شکلونوکې د x او y تر مینځ څه ډول اړیکه ده؟
- آیا کولای شو چې د(ج) او(د) په شکلونو کې داسې یوه کرښه وټاکو چې ټول ټکي پرې پراته وي؟
- د(ج) او (د) په شکلونو کې د x او y ترمنځ اړیکې په څه ډول دي؟
- د (الف) او (ب) د شکلونو اړیکې د(ج) او(د) د شکلونو له اړیکو سره پرتله او ووایئ چې د y د متحول خطا د x د متحول په مرسته په کوم شکل کې ډېره ده؟

له پورتني فعالیت څخه داسې پوهېږو چې که چېرې ټکي په مستوي کې یوې مستقیمې کرښې ته نږدې پراته وي؛ نو په دې صورت کې د y د متحول خطا نظر x ته لږ ده او برعکس هر څومره چې ټکي له کرښې لرې پراته وي، نو په هم هغه اندازه د y خطا ډېره ده.

له دې کبله داسې معیار غواړو در وېږنو چې د ټکو پیوستون مونږ ته اندازه کړي.

هغه فورمول چې د پیوستون د محاسبې لپاره ورکړ شوی ده، د پیوستون د ضریب په نامه یاد او په r سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$r=\frac{\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{n}-(\text{د } y \text{ ګانو اوسط})(\text{د } x \text{ ونو اوسط})}{(\text{د } y \text{ ګانو معیاري انحراف})(\text{د } x \text{ ونو معیاري انحراف})}=\frac{\frac{\sum xy}{n}-\bar{x}\,\bar{y}}{S_x\,S_y}$$

مثال: دموږکانو د لومړني وزن او غذایي رژیم څخه وروسته ډېټا لکه: لاندې جدول په پام کې ونیسئ.

د موږکانو شمېره	لومړنی وزن X	له عملیې څخه وروسته وزن y	د x او y دضرب حاصل
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

دلومړني او وروستني غذایي رژیم د وزنونو تر منځ د پیوستون ضریب محاسبه کړئ.

حل: که چېرې x لومړني وزنونه او y د غذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته وزنونه او $n=5$ د موږکانو شمېر په پام کې ونیسو، نو د x او y اوسطونه عبارت دی له:

$$\bar{x}=\frac{9}{5}=1.8 \qquad , \qquad \bar{y}=\frac{27}{5}=5.4$$

$$S_x^2=\text{د } x \text{ ونو واریانس}=\frac{(1-1.8)^2+(2-1.8)^2+(1-1.8)^2+(3-1.8)^2+(2-1.8)^2}{5}$$

$$=\frac{0.64+0.04+0.64+1.44+0.04}{5}=\frac{2.8}{5}=0.56$$

$$S_y^2=\text{د } y \text{ ګانو واریانس}=\frac{(8-5.4)^2+(3-5.4)^2+(7-5.4)^2+(5-5.4)^2+(4-5.4)^2}{5}$$

$$=\frac{6.76+5.76+2.56+0.16+1.96}{5}=\frac{17.2}{5}=3.44$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د ډېټا شمېر}}=\frac{\sum x\cdot\sum y}{n}=\frac{(1\cdot8)+(2\cdot3)+(1\cdot7)+(3\cdot5)+(2\cdot4)}{5}=\frac{44}{5}=8.8$$

په دې ډول په پایله کې د پیوستون ضریب په لاندې ډول لاس ته را ځي:

$$r = \text{د پیوستون ضریب} = \frac{8.8-(1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\cdot\sqrt{3.44}} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

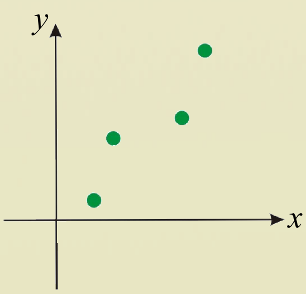
اوس داسې سوال را منځ ته کېږي چې د پیوستون د -0.67 ضریب د x او y ترمنځ د ډېر پیوستون ښودونکې ده او که نه؟ د دې سوال د ځواب د پیدا کېدو لپاره د پیوستون ضریب له لاندې مثالونو څخه په څو مرحلو کې په لاس راوړو:

مثال: لاندې جدولونه په پام کې و نیسئ:

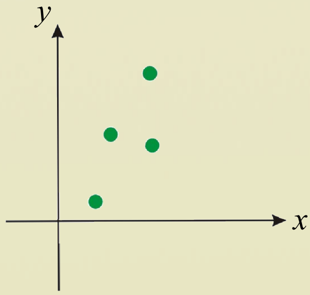
x	y
1	2.5
2	5.5
3	6.5
4	8.5

x	y
1	2
2	6
3	6
4	10

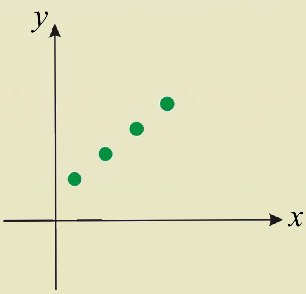
x	y
1	3
2	5
3	7
4	9



(ج)



(ب)



(الف)

د (الف) په شکل کې ټکي ټول په یوه کرښه پراته دي، نو په دې ډول د ټکو ترمنځ د پیوستون ضریب ډېر لوړ قیمت لري.

د (ب) په شکل کې ټکي د یوې مستقیمې کرښې په شاخوا پراته دي، نو له دې کبله نظر د(الف) حالت تـه د ټکـو تر منځ د پیوستون ضریب لږ دی د (ج) په شکل کې څرنګه چې ټکي د مستقیمې کرښې د(ب) د حالـت پـه انـدازه نږدې پراته دي، نو باید ضریب یې په دې حالت کې د(ب) له حالته زیات، خو د(الف) له حالته لږ دی، د دې خبرې د پخلي لپاره موضوع په لاندې ډول څېړو، د پیوستون ضریب د(الف) حالت لپاره:

$$\bar{x} = \frac{10}{4} = 2.5 \qquad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\text{د } x \text{ ونو واریانس} = \frac{(-1.5)^2+(-0.5)^2+(0.5)^2+(1.5)^2}{4} = \frac{2.25+0.25+0.25+2.25}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$\text{د } y \text{ ګانو واریانس} = \frac{(-3)^2+(-1)^2+1^2+3^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو دضرب حاصل} = (1\cdot3)+(2\cdot5)+(3\cdot7)+(9\cdot4) = 70$$

$r =$ دپیوستون ضریب $= \dfrac{\frac{70}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{17.5-15}{\sqrt{6.25}} = \dfrac{2.5}{2.5} = 1$

د پیوستون ضریب د (ب) په حالت کې:

$\bar{x} = 2.5 \quad , \quad \bar{y} = \dfrac{24}{4} = 6$

د x ونو واریانس $= 1.25$ ، د y ګانو واریانس $= \dfrac{16+0+0+16}{4} = 8$

د x او y ګانو د ضرب د حاصل مجموعه $= 2+12+18+40 = 72$

د پیوستون ضریب $= \dfrac{\frac{72}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{8}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$

د (ج) په حالت کې د پیوستون ضریب: $\bar{y} = \dfrac{23}{4} = 5.75 \quad , \quad \bar{x} = 2.5$

د x ونو واریانس $= 1.25$ ، د y ګانو واریانس $= 4.6875$

$\dfrac{\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{4} = 16.75$

د پیوستون ضریب $= \dfrac{16.75-(2.5)(5.75)}{\sqrt{1.25}\sqrt{4.6875}} = \dfrac{2.375}{\sqrt{5.858}} = 0.9812$

په یاد ولرئ چې په هغو شرایطو کې چې y لږ خطا و لري(د x او y مقدارونه خط ته نږدې پراته دي) که چیرې د پیوستون ضریبونه 1او -1 وي، x او y پر یوه مستقیمه کرښه پراته دي. غیر له هغه څخه د پیوستون ضریب د دغو دوو مقدارونو تر منځ پروت دی.

پوښتنې

1- لاندې ډېټا راکړل شوې ده.

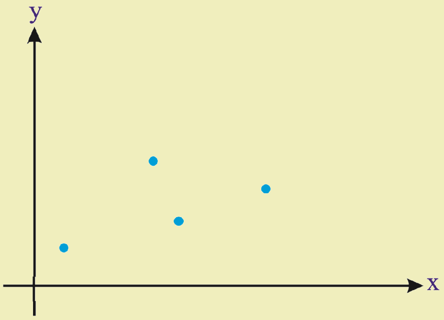
x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د ډېټا دپیوستون ضریب محاسبه کړئ.

2- د خپلو ټولګیوالو د ونې او وزن تر منځ د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

د خطي میلان معادله

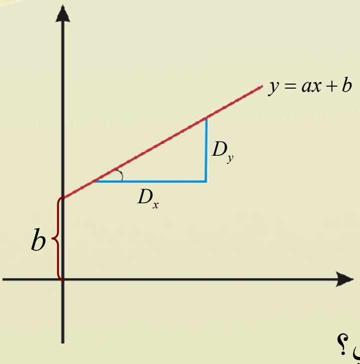
The linear regression equation



فرض کړئ چې یو پاشلی ګراف په لاندې ډول راکړل شوی وي. یوه مستقیمه کرښه چې معادله یې د $y = ax + b$ په ډول ورکړل شوې وي، پیدا کړئ چې ګراف یې ټولو ټکو ته نږدې فاصله یا واټن ولري.

فعالیت

په مخامخ شکل کې یوه خطي تابع(لومړۍ درجه) چې ګراف یې مستقیمه کرښه ده، رسم شوې ده.

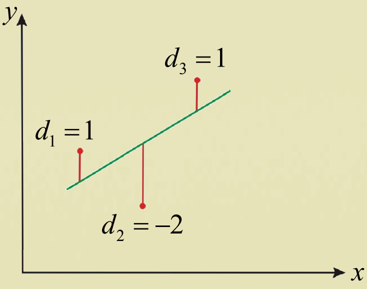


- د $y = ax + b$ خطي تابع کې a او b څه ډول مقدارونه دي؟
- د $y = ax + b$ په تابع کې د x او y متحولین په کوم نوم یادیږي؟
- د $y = ax + b$ مستقیمي کرښې میل پیدا کړئ؟
- د $y = ax + b$ په معادله کې د y بدلون ، د یو واحد په اندازه په x کې و ټاکئ؟
- د $y = ax + b$ معادله کې که چیرې $a > 0$ وي؛ د تابع ګراف متزاید او که متناقص دی؟

همدغه راز که چیرې $a < 0$ سره وي، د تابع ګراف څه شکل لري؟

او که چیرې $a = 0$ وي، د تابع دګراف شکل و ټاکئ؟

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

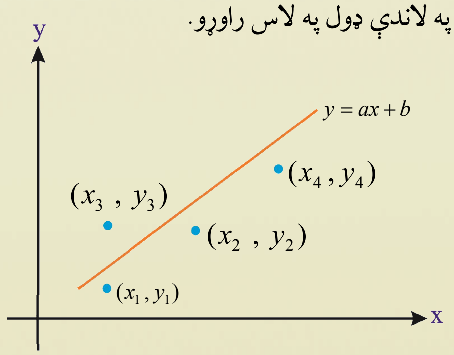


د فاصلو مجموع $d_1 + d_2 + d_3$ او $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو چې د $y = ax + b$ معادله یوه خطي تابع ده چې د a ضریب ددې معادلې میل جوړ وي او کله چې a مثبت وي، مستقیمه کرښه متزاید او که چېرې a منفي وي، نو کرښه متناقصه ده.

پاملرنه وکړئ چې که د (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کې صدق وکړي، په دې صورت کې نوموړې ټکي د مستقیمې کرښې په ګراف پراته دي.

هر څومره چې د پاشلي ټکی مستقیمې کرښې ته نژدې وي، نو د پیوستون ضریب به -1 او $+1$ ته ورنژدې وي، که چېرې د یوې مستقیمې کرښې معادله ولرو او پوه شو چې د پیوستون ضریب مناسب او کولای شو د y د متحول په مرسته متحول وټاکو او که چیرې مستقیمه کرښه ونلرو، کولای شو چې دغه کرښه په داسې یوه تګلاره چې د لږکیو یعني اصغري مېتود جوړونې[1] مربعو په نامه یادیږي، په لاندې ډول په لاس راوړو.

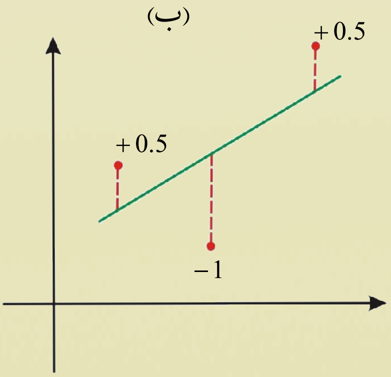


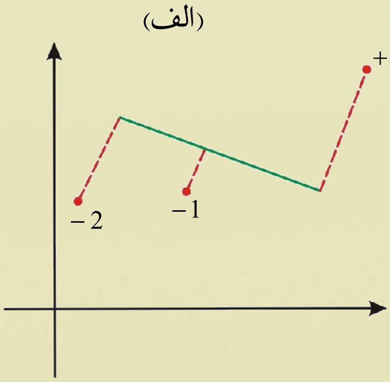
فرض کوو چې د پاشلو ټکو ګراف (متفرقه دیاګرام یا Scatrter diagram) په دې ډول راکړل شوی وي.

او غواړو داسې یوه کرښه چې معادله یې $y = ax + b$ وي، د ټکو له منځ څخه داسې تیره کړو چې ټولو ټکو ته نږدې وي. په دې تګلاره کې باید په مناسب ډول د کرښې معادله داسې جوړه شي چې د عمودي انحرافونو د دویم توان مجموع له مستقیمې کرښې څخه لږ تر لږه اصغري وي، مخ کې له فورمول څخه لاندې مثال په پام کې نیسو:

x	1	5	9
y	6	5	7

لاندې شکلونه د دغې ډېټا لپاره رسموو او د کرښو خطاوې له مشاهدو څخه تشخیصوو.





1- the method of least square

ښکاره ده چې رسم شوې کرښه د (ب) په حالت کې په مرتب ډول د(الف) له حالته څخه ښه ده.

په دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاګانو الجبري جمع صفر ده.

د (الف) حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

د (ب) حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

څرنګه چې په دواړو حالتونو کې د جمعې حاصل مساوي په صفر ده، نو له دې کبله نشو ويلای چې کومه کرښه يوه مناسبه کرښه ده. ددې لپاره چې مثبت او منفي خطاوې يو له بله د منځه يو نسي، نو هره کرښه وروسته له مربع کولو جمع کوو:

$$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 =$$ د خطاګانو د دويم توان مجموع

$$1.5 = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 =$$ د خطاګانو ددويم توان مجموع

له دې کبله د کرښې د خطاګانو د دويم توان مجموع څرنګه چې د(ب) په حالت کې نظر له(الف) حالت څخه يې قيمت لږ دی، نو ويلی شوچې:

مناسبه کرښه هغه ده چې د خطاګانو د مربعاتو مجموع يې له نورو کرښو کمه وي، دغه راز کرښو ته د ريګريشن کرښې وايي.

که چېرې د ريګريشن کرښې د مقدار او هغو مشاهداتو تر منځ د مقدارونو توپيرچې منځ ته راځي په $\bar{y}$ وښيو، په دې صورت کې د دويمو توانونو د مجموع د لا کوچني والي په خاطر په لاندې ډول عمل کوو:

$$\text{د خطاګانو ددويمو توانونو مجموع} = \sum (y-\bar{y})^2 = \sum [y-(ax+b)]^2$$
$$= \sum (y-b-ax)^2$$
$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2 + \dots..$$

په دې حالت کې x او y ثابت، a او b متحولين دي.

پرته له دې مونږ هغه تګلاره چې د a او b د محاسبې او په لاس راوړلو لپاره په کار لويدلې، ورننو ځو، يوازې د هغوی د محاسبې خطا په پام کې نيسو:

$$a = r\frac{sy}{sx}\quad b = \text{د پيوستون ضريب} \times \frac{\text{د } y \text{ معياري انحراف}}{\text{د } x \text{ معياري انحراف}}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \qquad , \qquad b = \frac{\sum x\,y - n\,\bar{x}\,y}{\sum x^2 - n\,\bar{x}^2} = \frac{\sum x\,y}{\sum x^2}$$

د a او b د محاسبې دغه لاره چې د لږکيو مربعاتو تګلارې په نامه يادېږي.

پایله: د ریګریشن کرښه هغه وسیله ده چې د یو متحول د مقدار د وړاند وینې لپاره د بل متحول په حسابولو کې چې ورسره تړلې دی، د استفادې وړ ګرځي.

مثال:لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د y د ریګریشن کرښه نظر x ته په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2 \quad \Rightarrow \quad S_x = \sqrt{2}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} \quad \Rightarrow \quad S_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{4+6+6+4+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - \bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{4-3\cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

له دې کبله:

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b\cdot 3$$

$$a = r\frac{S_y}{S_x} = -1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2-(-1)(3) = 2+3 = 5$$

په دې ډول د ریګریشن معادله عبارت ده له: $y = ax + b = -x + 5$

پوښتنه

که چېرې $y = 2x+3$ د y د ریګریشن معادله نظر x ته او د x اوسط مساوي په 2 راکړل شوي وي، د y اوسط به څومره وي؟

د بدلون ضریب: د بدلون ضریب د معیاري انحراف له اوسط څخه عبارت دی چې مطلق بې واحده عدد دی لکه:

$$\text{د بدلون ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}} \quad \text{یا} \quad C\cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

دغه ضریب ډېر خلې د فیصدي په ډول ښودل کېږي چې د تحول د ضریب په نامه یادېږي.

$$\text{د تحول ضریب} \quad C\cdot V = 100\cdot\frac{S}{\bar{x}}$$

د بدلون ضریب د مثبتې ډېټا لپاره تعریفېږي، پـه یاد یـې ولـرئ کـه چېـرې ډېټا سـره مساوي وي، نـو د ټيتـوالي ټـول معیارونه مساوي له صفر سره دي.

په نورماله منحني کې ټيتوالی: نورمالـه منحنـي د احصایوي مجمـوعې یـوه داسـې توصـیفي وسـیله ده چې پـه نورماله منحني کې ډېټا په نورماله توزیع او کثرت منحني کـې متنـاظر پراتـه دي؛ نـو واریـانس عمـده نقـش لـري، پـه حقیقت کې د دوو پارامترو مشخص کېدل او معیاري انحراف په نورماله توزیع کې په عمومي ډول مشخص او د هـر ډول شاخص د محاسبې زمینه برابر وي.

د نورمالي توزیع د شکل شاخصونه: د اوسط او معیـاري انحـراف پـه مرسـته کـولای شـو د لیـد څرنګـوالی د کږېدواو پرسېدو(اوج) په ډول په ښه توګه څرګند او وړاندې کړو.

د کږېدلو معیار د کږېدو او پیوستون د ضریبونو په مرسته چې د اندازه کولو او اندازو د پرتلـه کولـو لپـاره پکـارېږي پـه لاندې ډول لیکل کېږي:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum f_i(x_i-\bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad SK_{(p)} = \frac{3(\bar{x}-med)}{S}$$

د پرسېدو(جګېدلو) معیار د پرسېدو د ضریب α_4 په مرسته اندازه او پرتله کېږي.

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{S^4} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\bar{x})^4}{S^4}$$

څومتحوله ټولنې: په احصایوي څېړنو کې تر ټولو لویه موخه وړاندوینه او د یو متحول ټاکل د بل متحول له مخې دي. کله چې د دوو شیانو ترمنځ اړیکې څېړل زموږ مقصد وي، په حقیقت کې موخه یوه دوه متحوله ټولنه ده لکـه: د یو غاز د حجم او فشار تـرمنځ اړیکـه د صـحت او حرکـت د میـزان تـرمنځ اړیکـه، د کرنـې او د حاصـل د مقـدار ترمنځ اړیکه او یا هم د یوې دایرې د شعاع او مساحت ترمنځ اړیکـه چـې دغـه راز ټـولې اړیکـې دوه متحولـه ټولنې بیانوي. د آسانتیا لپاره معمولاً د دوه یا څو متحولینو ترمنځ اړیکه د ریاضي معادلو په مرسته وړاندې کوي.

د تيتوالي گراف: د تيتوالي گراف د رسمولو لپاره ډېټا د مرتبو جوړو په شکل په يوه مستوي کې د قايمو مختصاتو په سېستم کې ښودل کېږي. کيداى شي د ټکو او تيتوالي گراف په مرسته درې ډوله اطلاعات زموږ په اختيار کې راکړي.

الف: آيا داسې نمونه چې د څېړنو ترمنځ اړيکه ښيي، شته او که نه؟

ب: د يو ډول اړيکې د شتون په صورت کې دغه اړيکه خطي ده او که نه؟

ج: که چېرې اړيکه خطي وي، نو څه ډول اړيکه ده؟

پيوستون او د پيوستون ضريب: پيوستون د متحولينو ترمنځ د اړيکو د مېندلو درجه ده، کله کله دواړه متحولين په يوه لورې بدلون کوي يعنې x او y دواړه په يوه کرښه لوى او ياهم کوچنى شي، چې پيوستون يې مستقيمه کرښه ده. که چېرې د دوو متحولينو اندازه يو د بل پر خلاف بدلون وکړي يعنې که چېرې x لوى شي y کوچنى کېږي. او يا هم برعکس صورت نيسي.

د پېژندنې ډېر ښه معيار د پيوستون شتون او نه شتون دى او حتا د خطي پيوستون ډول، جهت او ميزان د پيوستون ضريب دى، چې د لاندې فورمول په واسطه ښوول کېږي:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - (\bar{x}\,\bar{y})}{S_x \cdot S_y}$$

په پورتنيو اړيکو کې $\sum xy$ د x ونو او y گانو د ضرب د حاصل مجموع، $\bar{x}$ د x ونو اوسط او $\bar{y}$ د y گانو اوسط دى، همداراز S_x د x ونو معياري انحراف او S_y د y گانو معياري انحراف دى.

د ريگريشن کرښه: ريگريشن(تخميني) د تابع د يوه متحول له قيمت لاسته راوړل او سنجش څخه عبارت دى، چې د يو يا څو مستقلو متحولينو له ارزښت څخه په لاس راځي.

هغه معادله چې د متحولينو ترمنځ اړيکې افاده کوي، د ريگرېشن معادلې په نامه يادېږي.

کولاى شو دغه معادله د ډېرو لږو مربعاتو د محاسبې په طريقه حساب او همدارنگه د a او b ضريبونه د دغې طريقې په مرسته په لاندې ډول په لاس راوړو: $a = \bar{y} - b\bar{x}$, $b = r\frac{S_y}{S_x}$

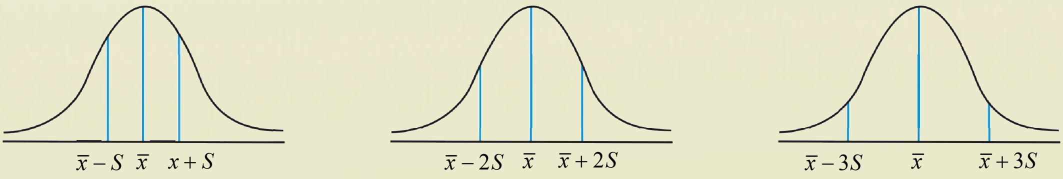
چې S_y د y معياري انحراف او S_x د x معياري انحراف دى، په داسې حال کې چې r د پيوستون ضريب، $\bar{x}$ د x ونو اوسط او $\bar{y}$ د y گانو اوسط دى.

د څپرکي پوښتنې

1-که چېرې په یوه ټولنه کې چې اوسط یې $\bar{x}=50$ او واریانس یې $S^2=64$ وي، د بدلون ضریب y چې له $y=2x+10$ رابطې سره سم بدلون مومي څو دی؟

2-که چېرې د هر زده کوونکی په نمرو کې 20% نمبرې ورزیاتې شي، نو د نمرو د بدلون په ضریب څه اغیزه کوي؟

3- د هغو ټولنو فیصدي چې په لاندې درکړل شوو منحني ګانو کې پرته ده، ولیکئ؟



4- لاندې اړیکو ته په پاملرنې سره وواياست چې کومه یوه له دغو اړیکو څخه یو متحوله، دوه متحوله او درې متحوله اړیکې دي.

الف: ستاسو د ټولګیوالو د ونو اندازه؟

ب: د یو شي د عمومي مصرف او جنس ترمنځ اړیکه؟

ج: د یوې استوانې د حجم، جګوالی او د قاعدې د مساحت تر منځ اړیکې؟

5- د یو ټولګي د مصرف شوو ساعتونو د شمېر او د زدکوونکو د نمبرو تر منځ چې د 20% له مخې اخېستل شوی دی، د مرتبو جوړو په شکل په لاندې ډول دی:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)
(5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)
(7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

د زده کونکو د مصرف شوو ساعتونو او نمبرو تر منځ د اړیکو له مخې ګراف رسم او خپلې پایلې وڅېړئ؟

6- مخامخ ډېټا په پام کې ونیسئ:

x	1	1	2	3
y	1	5	4	2

په ورکړ شوې ډېټا کې د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

که چېرې د پیوستون ضریب صفر ته نژدې وي، نو خطا ډېره، که لږه ده؟

که چېرې د پیوستون ضریب د $+1$ او -1 عدد ته نژدې وي، نو د y د خطا په اړوند څه وایئ؟

د سروې له مخې چې د یوه ښوونځي په دوو A او B ټولګیو کې شوې ده، لاندې عددونه د کیلوګرام په حساب د زده کوونکو د وزن لپاره راټول شوي دي:

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

د پورتنیو اعدادو په پام کې نیولو سره:

الف: د معلومات د تیتوالي ګراف رسم کړئ؟

ب: د اړوندي مستقیمې کرښې معادله په لاس راوړئ a او b وټاکئ؟

ج: اړونده مستقیمه کرښه نظر د ریګرېشن معادلې ته رسم کړئ؟

10- که چېرې x او y سره بشپړ پیوستون او معکوس ولري، یعنې $S_x = S_y$، نو د y نسبت x ته د ریګرېشن خط کوم دی؟

1) $y=-\frac{1}{2}x+b$ 2) $y=\frac{1}{2}x+b$ 3) $y=x+b$ 4) $y=-x+b$

11- د 20 تنو زده کوونکو د ریاضي او فزیک د مضمون 20% د آزموینې پایلې چې په لاندې ډول ورکړ شوي، رسم کړئ؟

زده‌کوونکي	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
د ریاضي نمبرې	18	8	12	18	16	6	10	6	16	10	12
د فزیک نمبرې	16	10	8	18	14	10	10	6	10	14	10

زده‌کوونکي	12	13	14	15	16	17	18	19	20
د ریاضي نمبرې	12	10	16	18	12	6	14	14	12
د فزیک نمبرې	6	12	16	12	12	8	12	14	16

ـ د ریګریشن د کرښې معادله په لاس راوړئ؟

ـ آیا د دوو آزموینو د پایلو تر منځ اړیکې شتون لري؟

12- پر چنګښو د خوراک د مالګې د 5 او یو فیصده محلول اغیزې د یون پلازما پر میزان د هغوی په بدن کې په لاندې جدول کې ثبت شوي دي؟

د مالګې په محلول کې د پاتې کېدو وخت	50	40	30	20	10	5	0
د یون پلازما میزان (mm)	136	132	126	122	118	110	90

ـ په پورتنی جدول کې متحولین وڅېړئ؟

ـ په پورتنیو متحولینو کې کوم یو خپلواک او کوم یو ناخپلواک متحول دی؟

ـ یو داسې ګراف رسم کړئ چې د دواړو متحولینو ترمنځ اړیکه وښیي؟

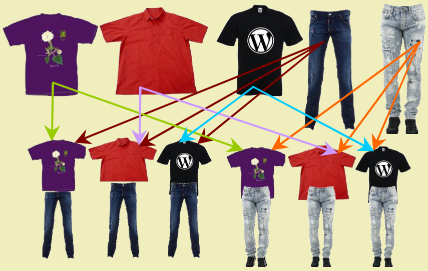
ـ د دې ګراف په رسم کې خپلواک متحول په افقي محور وښایاست؟

نهم څپرکی

احتمالات

پرموټېشن یا ترتیب

Permutation



که چېرې درې بېلابېل کمیسونه او دوه پطلونونه ولرو، په څو ډوله کولای شو هغه سره جوړه جوړه واغوندو؟

فعالیت

خپل درې تنه ملګري وآزمویئ چې په څو ډوله کولای شي په یو کتار کې و درېږي؟

- له درې یو رقمي اختیاري عددونو څخه څو درې رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو.
- له پورتنیو عددونو څخه چې پورته مو د درې رقمي عددونو د جوړولو لپاره ټاکلي دي څو درې رقمي عدونه جوړولای شو، په دې شرط چې په عددکې رقم تکرار نه وي.
- د پورتنی فعالیت د اول، دویم او دریم پاراګراف پایلې سره پرتله او ووایې چې څه اړیکې سره لري؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله

د n شیانو د ترتیب د شمېر ډولونه چې سره خوا په خوا راشي عبارت دي له:

- که تکرار مجاز نه وي مساوي په $n\cdot(n-1)\ \dots\ 2\cdot 1$ سره دي.
- که تکرار مجاز وي مساوي په $\underbrace{n\cdot n\cdot\ \dots\ \cdot n}_{n\ \text{ځلې}} = n^n$ سره دي.

تعریف: د یوه طبیعي عدد لپاره د $(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \dots\ \cdot n)$ حاصل ضرب په لنډ ډول په n! (n – فکتوریل) ښودل کېږي. او د تعریف له مخې $1!=1, 0!=1$ سره دي.

2: د n عنصرونو د ترتیب ډولونه چې د n غړو د پرموټېشن (Permutation) په نامه هم یادېږي په P_n سره ښودل کېږي. که چېرې تکرار په ترتیب کې ناشونی او یا مجازنه وي.

نو د پاسني تعریف په پام کې نیولو سره $P_n = n!$ سره کېږي.

که چېرې په ترتيب کې تکرار شونی او يا مجاز وي، نو په دې صورت کې د ترتيب ډولونه او يا پرموټېشنونه په مجاز تکرار کې عبارت دي له. $(k \le n)$, $P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}$ او دارنګه معنا ورکوي چې يو عنصر په n ترتيب کې k ځلې تکرار شوي دي.

لومړی مثال: (1) : د لاندې عددونو قيمت پيدا کړئ.

$$3!, 8!, 5!$$

(2) د هر يوه طبيعي عدد لپاره وښيئ چې $n! = n(n-1)!$ سره ده؟

حل (i): د تعريف له مخې لرو چې:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$
$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

(ii) پوهېږو چې: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \dots \ \cdot n = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \dots \ \cdot n-1)(n) = n(n-1)!$

دويم مثال: د آزموينې لپاره په يوسالون کې 16 زده کوونکي له بېلابېلو ټولګيو د سوېې آزموينې لپاره راغونډ شوې دي.

په څو ډوله کولای شو د 16 مېزونو تر شا په ليکه کښېني چې د هر يو د ځای تغيير د ناستې يو حالت وشمېرل شي.

حل: پوهېږو چې ځواب 16! دی چې تکرار پکې ناشونی دی. که چېرې تکرار مجاز وي، په دې صورت کې مسئله عبارت له ترتيب د n شيانو چې k عدده يې د مثال په ډول په تکراري ډول راښکاربږي، نو په دې صورت کې لرو چې: $P_n^k = \frac{n!}{k!}$, $(k \le n)$

مثلاً په پاسني مثال کې، که چېرې 16 زده کوونکي وغواړي خپل ځايونه په خپلو لاسي بکسونو ونيسي او له دې څخه 4 تنه يو ډول لاسي بکسونه ولري، نو لرو چې:

$$P_{16}^{(4)} = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 43680$$

که چېرې د دې مسئلې عمومي حالت په پام کې ونيسو، نو په دې صورت کې د $P_n^{(k_1, k_2, \ \dots \ , k_n)}$ n ترتيبه يا پرموټېشنونه چې په هغه کې تکرار مجاز نه او په حقيقت کې، m ګروپه شيان چې هر يو يې په ترتيب سره د $k_1!, k_2! \cdot \ \dots \ \cdot k_n!$ په اندازه سره يو شان دي، لرو چې:

$$P_n^{(k_1, k_2, \ \dots \ , k_n)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ \dots \ \cdot k_n!}$$

دریم مثال: له پنځه $(5,5,5,4,4)$ عددونو څخه په څو ډوله کولای شو، پنځه رقمي عددونه جوړ کړو.

حل: پوهېږو چې د فورمول له مخې د عددونو شمېر عبارت دی له: $P_3^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$

چې په خپله عددونه په لاندې ډول دي:

55544 , 55454 , 54554 , 45554 , 45545

45455 , 44555 , 54545 , 55445 , 54455

څلورم مثال: د سبا کاروان ټرانسپورټي شرکت د کابل جلال آباد په لین کې 5 لوی سروېسونه او د جلال آباد- کنړ په لاره 3 میني بسه لري. په څو ډوله کولای شو، د نومړي ټرانسپورټ په سروېسونو او میني بسونو کې له کابله- کنړ ته سفر وکړو؟

حل:پوهېږو له کابله تر جلال آباد پورې د نومړي شرکت له سروېسونو څخه یوازې 5 امکانه وجود لري، چې د هر یوه امکان په وړاندې 3 امکانه د میني بس د انتخاب چانس له جلال آباد څخه تر کنړه، د نومړي شرکت وجود لري.

په دې ډول ټول امکانات مساي دي په: $5\times3=15$

پنځم مثال: د $8,7,2$ او 5 عددونو په مرسته څو درې رقمي عددونه پرته له تکراره جوړولای شو.

حل: دې خبرې ته په پاملرنې سره چې عددونه درې رقمي دي، نو درې خالي ځایونه لرو، چې په لاندې ډول د هغو ډکول په عددونو امکان لري:

د دریم رقم ځای	د دویم رقم ځای	د لومړي رقم ځای	
2	3	4	دامکاناتو ډولونه

پوهېږو چې د لومړي رقم د ځای د ډکولو لپاره 4 امکانه شتون لري، په دې ډول د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره 3 امکانه پاتې کېږي، ځکه چې له څلور عددونو څخه یو د لومړي رقم لپاره نیول شوی دی، او بلې خواته څرنګه چې تکرار مجاز نه دی، نو یوازې 3 امکانه د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره شته او د دریم رقم د ځای د ډکولو لپاره دوه امکانه شته چې ټول حالتونه عبارت دي له: $4\cdot3\cdot2=24$ او د فورمول له مخې لروچې:

$$P_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1!}{1!} = 24$$

پوښتنې

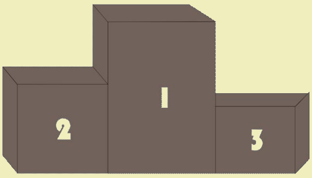
1. څو پنځه رقمي عددونه وجود لري چې لومړی رقم یې 2 او وروستی رقم یې مساوي په 4 وي، په عدد کې هیڅ رقم تکراري نه وي؟

2. په څو ډوله 10 نفره کولای شي، د یوه ګردي میز په شاوخوا کې کښېني چې له دې جملې څخه 2 تنه غواړي په هر حالت کې سره خوا په خوا کښېني.

3. په څو ډول کولای شئ 3 سره توپونه، 2 آسماني او څلور زیړ توپونه سره خوا په خوا په یو کتار کې کېږدو. د هم رنګه توپونو په کتار کې د هم رنګه توپونو ځای بدلول بل حالت نه شمېرل کېږي.

ترکيب يا کمبينيشن

Combination



د 1 او 2 عددونو ترکيب څه دی؟

د 1 او 2 عددونو ترتيب کوم دی؟

ستا سو له نظره ترکيبونه او ترتيبونه څه توپير سره لري؟

مخکې له دې چې لاندې فعاليت سرته ورسوو، لاندې تعريف چې په فعاليت کې به له هغه څخه کار واخلو په پام کې نيسو.

تعريف

د $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ ليکدود چې n د k له پاسه ويل کيږي او په حقيقت کې د بينوم د ضريبونو په نامه يادېږي چې k د بينوم توان ښيي او په لاندې ډول دی:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0 \le k \le n \quad , \quad k , n \in IN$$

فعاليت

- د پورتني تعريف په پام کې نيولو سره، د بينوم د $(a+b)^2$ د دوه حدي په انکشاف کې د بينوم ضرايب چې مساوي په $\begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$ $k = 0,1,2,$ سره دی، پرتله کړئ:

$$(a+b)^2 = \square\, a^2 + \square\, ab + \square\, b^2$$

- د بينوم ضريبونه چې په پاسني انکشاف کې، په چوکاټونو کې نيول شوي، د $\begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$ له $k = 0,1,2$ قيمتونو سره پرتله کړئ؟
- څرنګه چې $1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ سره دي، ولاې شئ چې د هر $n \in IN$ لپاره $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$ او د $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$ قيمتونه هم سره برابر او مساوي په 1 دي؟
- د $(a+b)^n$ په انکشاف کې د بينوم د ضريب د دويم حد قيمت د $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ له مخې حساب کړئ.
- د $\begin{pmatrix} 4 \\ k \end{pmatrix}$ $k = 0,1,2,3,4,$ قيمتونه د بينوم د انکشاف له کومو ضريبونو سره مساوي دی، ويې ليکئ؟

له پاسني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: د هر n او k طبيعي عددونو لپاره، په داسې حال کې چې $0 \le k \le n$ سره دی لرو:

$$\binom{n}{0}=1 \quad , \quad \binom{n}{n}=1 \qquad \text{(i)}$$

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r} \qquad \text{(ii)}$$

(iii) له n شخه د r شیانو ترکیبونه عبارت د یو n عنصره سټ د غړو د ترکیب یا کمبینیشن د r له n

شیانو څخه ده چې په C_r^n سره ښودل کېږي او قیمت یې عبارت دی له: $C_r^n=\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

لومړی مثال: په یوه ښوونځي کې د لسم 7 ټولګي شتون لري. د ښوونځي اداره غواړي چې لسم ټولګي له 7 تنو اول نمره ګانو، 4 تنه و ټاکي. په څو ډوله دغه انتخاب کېدلای شي؟

حل: لیدل کېږي چې له 7 تنو څخه د 4 تنو په ټاکنه کې هیڅ ډول برلاسي او ترتیب په پام کې نشته؛ یعنې دا چې، مهمه نه ده زده کوونکي د کوم ټولګي دي، نو دا ډول مسئله عبارت له ترکیب څخه ده چې له 7 تنو څخه 4 تنه و ټاکو، نو لرو چې: $C_4^7=\binom{7}{4}=\dfrac{7!}{4!(7-4)!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{3!\cdot4!}=\dfrac{5\cdot6\cdot7}{6}=35$

دویم مثال: که له 7 تنو زده کوونکو 4 تنه د لسم ټولګي د زده کوونکو د اتحادیې د مشرتابه لپاره، داسې چې لومړی تن رئیس، دویم معاون، دریم منشي او څلورم تن د مالي مسؤول په توګه و ټاکل شي، په دې صورت کې لرو چې:

څرنګه چې لیدل کېږي په دې ټاکنه کې ترتیب مهم دی، څکه چې د ABCD د انتخاب ترتیب په داسې حال کې چې A رئیس، B معاون، C منشي او D مالي مسؤول دی، په داسې حال کې چې د CABD په ترکیب کې C رئیس، A معاون، B منشي او D مالي مسؤول ګڼل کېږي.

دا ډول مسئله عبارت له ترتیب یا پرموټېشن څخه ده چې له 7تنو څخه د 4 تنو په ترتیب انتخاب دی؛ یعنې لرو چې: $P(7,4)=\dfrac{7!}{(7-4)!}=\dfrac{7!}{3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!}=120\cdot7=840$

پوښتنې

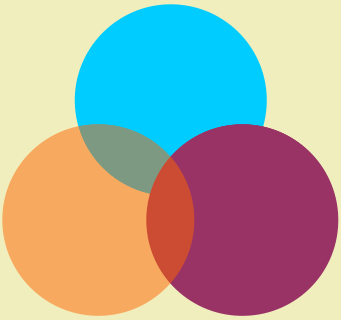
1- له اوو حرفونو څخه لکه: A,B,C,D,E,F او G څو 4 حرفي کلمې، پرته له تکراري حرفه جوړولای شو؟

2- د والیبال په یوه لیګ کې، 7 ټیمونه ګډون لري. څو ډوله ټیمونه کولای شي لومړی، دویم او دریم مقام لاس ته راوړي؟

3- له 4 نارینه وو او 6 مېرمنو څخه 2 نارینه او 3 ښځې داسې ټاکو چې نارینه په کې یو رئیس او دویم یې مالي مسؤول وي.

ترکیب

Combination



آیا پوهېږئ چې اصلي رنګونه کوم دي؟

د نارنجي او بنفش رنګ ترکیب کوم رنګ دی؟

ستاسو په نظر ژېړ رنګ د کومو رنګونو له ترکیبه جوړېږي؟

آسماني رنګ، بنفش رنګ، نارنجي رنګ.

فعالیت

د خپلو 5 تنو ټولګیوالو څخه 3 تنه په څو ډوله ټاکلی شئ؟

- موضوع په عملي توګه په ټولګي کې تجربه او حالتونه یې و شمېرئ؟
- که چېرې له 5 تنو زده‌کوونکو څخه 3 تنه داسې و ټاکل شي چې، لومړی کس سرګروپ، دویم د سرګروپ مرستیال او دریم تن منشي وي، د درې تنو ګروپ، د ټاکلو ټول ډولونه څو دي؟
- د پورتني فعالیت لومړی او وروستی جزء یو تربله څه توپیر لري؟
- آیا فکر کولای شئ د پاسنیو ګروپونو د ټاکلو شمېر مساوي له کوم عدد سره دی؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: دلته د k په شمېر غړو یو ګروپ له یو سټ څخه چې n غړي لري، په عمومي ډول په دوه ډوله صورت نیسي چې په یوه کې ترتیب په پام کې دی، خو په بل کې ترتیب مهم نه شمېرل کېږي، یوازې د هغوی ترکیب د پام وړ دی.

په دې ترتیب د یو ترکیب یا کمبینېشن چې k شیان له n بېلابېلو شیانو څخه مطلب دی، چې په لاندې تعریف کې بیانېږي.

تعریف: د k شیانو ترکیب له یوه n عنصره سټ څخه چې په C_k^n ښودل کېږي او عبارت له $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ ترکیبي امکاناتو څخه دی چې د k په شمېر غړي یې پرته له ترتیب څخه ټاکل کېږي، عبارت دي له:

$$C_k^n = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

لومړی مثال: له 30 تنو څخه د 4 تنو ټاکل چې ترتيب په کې مهم نه دی، حساب کړئ؟

حل: پوهېږو چې مسئله عبارت له 30 تنو څخه د 4 تنو دی چې د فورمول له مخې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_4^{30}=\binom{30}{4}=\frac{30!}{4!(30-4)!}=\frac{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26!}{26!\cdot4!}=27405$$

دويم مثال: له $A=\{1,2,3,4,5\}$ سټ څخه څو 3 عنصره فرعي ستونه په لاس راځي؟

حل: پوهېږو چې مسئله په حقيقت کې له 5 غړو څخه د 3 غړو ټاکل دي چې شمېر يې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_3^{5}=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}=10$$

پوښتنې

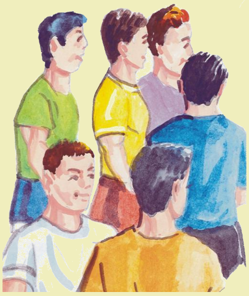
1- که چېرې په يوه آزموينه کې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځواب مطلوب وي، په څو ډوله کولای شو چې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنې د حل لپاره وټاکو؟

2- په يوه مستوي کې پنځه ټکي چې په يوه کرښه پراته نه دي، په پام کې ونيسئ د دې ټکو په نښولولو سره په څو ډوله مثلث جوړولای شو.

3- که چېرې $P(n,2)-C_2^n=36$ سره وي، د n قيمت پيدا کړئ؟

تبـدیـل

Variation



په یوه المپیاکې له 10 ورزشي ټیمونو څخه په څو ډولونو د سرو زرو، سپینو زرو او برونزو مډالونه شتون لري؟

فعالیت

- د n بېلابېلو شیانو په پام کې نیولو سره د k په شمېر شیان ټاکو،د هغوی مجموعي شمېر څو دی؟
- که چېرې د k شیانو په ټاکلو کې ترتیب داسې وي، چې په هغوی کې لومړی، دویم، دریم او ... شتون ولري، ټول مجموعي حالات به څو وي؟
- د پاسنیو دوارو ډولونو ترمنځ توپیر په کومه اندازه ده؟

پایله: د هغو ترکیبونو شمېر چې د k غړو د پرله پسې ترتیب په انتخاب کې له n غړو څخه په پام کې وي، نو په دې صورت کې یې شمېر مساوي په $k!{\cdot}C_k^n$ سره کېږي.

دغه ترکیب د وریشن Variation یا تبدیل په نامه یاد او په V_k^n سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$V_k^n = k!{\cdot}C_k^n = k!{\cdot}\frac{n!}{k!{\cdot}(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: څو امکانه وجود لري چې په یوه انتخاباتي غونډه کې له 30 تنوګډون کوونکو څخه 4 تنه د مشرتابه لپاره په داسې حال کې چې یو تن رئیس، یو لومړی مرستیال، یو دویم مرستیال او څلورم تن د منشي په توګه دنده ترسره کړي؟

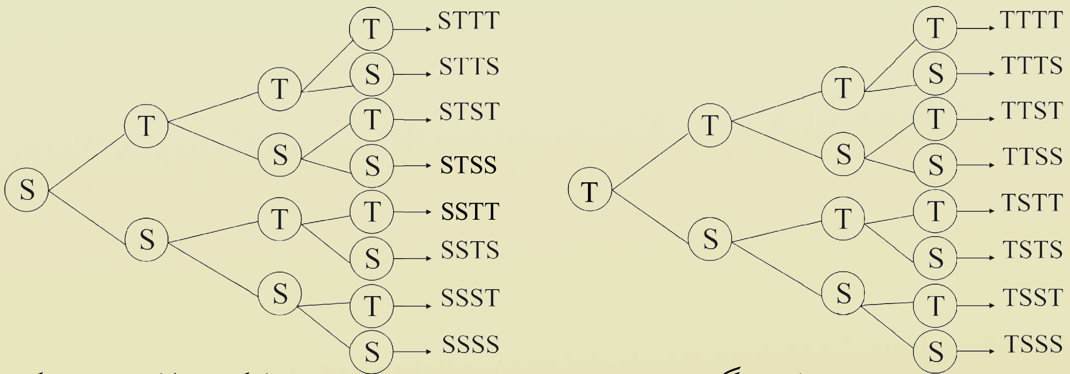
حل:مسئله په حقیقت کې د 4 تنو تبدیل له 30 تنو څخه ده، چې د تعریف له مخې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30\cdot 27\cdot 29\cdot 28\cdot 26!}{26!} = 657520$$

پورتنی حالات چې تر اوسه مو د ترتیبونو، ترکیبونو او تبدیلونو لپاره تر بحث لاندې و نیول په لاندې جدول کې را ټول شوي دي.

د ټاکنو ډول k غړي له n غړو څخه	د امکاناتو شمېر	
	پرته له تکراره $k \le n$	له تکرار سره $k \le n$
ترتیب یا پرموټېشن	$P(n,k) = n! \quad , \quad n = k$	$P(n,k) = \frac{n!}{k!}$
ترکیب یا کمبینېشن	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$
تبدیل یا وریشن	$V_k^n = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^n = n^k$

مثال: د یوې سکې په اچولو سره چې د راتګ امکان یې، شیر یا خط ممکن دی او د هرې خوا د راتګ احتمال یې مساوي په $\frac{1}{2}$ دی، په پام کې ونیسئ، که چیرې سکه 2 ځلې، درې ځلې، شپږ ځلې، اته ځلې او یا 16 ځلې وغورځوو، پوهېږو چې د هم چانسو لومړنیو پېښو په نمونه‌یي فضا کې په یوه ونه‌ییز ګراف کې لاندې حالت لرو: (شیر = S او خط = T) دی.

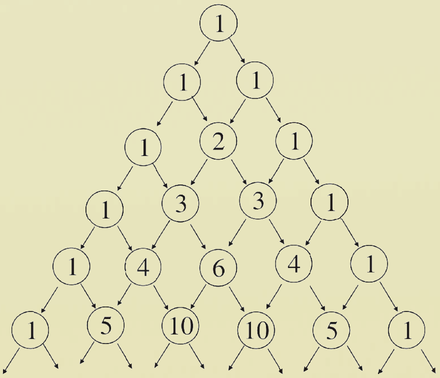


د پاسني مثال د شیر او خط د راتګ احتمال په یو، دوه، درې او څلور ځلې اچولو کې په لاندې جدول کې راټول شوي دي.

څلورځله احتمال	څلورځله خط	درې ځله احتمال	درې ځله خط	دوه ځله احتمال	دوه ځله خط	یوځل احتمال	یوځل خط	هیڅ ځل احتمال	هیڅ ځل خط	د سکې غورځول
$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	د خط د راتګ شمیر
$\frac{4}{16}$	1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{2}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	1			
$\frac{6}{16}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{1}{4}$	2					
$\frac{4}{16}$	3	$\frac{1}{8}$	3							
$\frac{1}{16}$	4									

که چېرې جدول ته په ځیر سره پاملرنه وکړئ، د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم وینو چې د بنیوم په انکشاف کې په ترتیب سره د حدونو ثابت غړي دي چې د لومړي ځل لپاره د پاسکال له خوا راوپېژندل شول او تر اوسه د هغه په نامه یادېږي.

دغه نظم مثلاً په مخامخ مثلث کې په یوه لیکه کې اعداد د کیڼې او ښي خوا د عددونو سره په پورته لیکه کې له جمعې لاس ته راغلي دي.



په دې ډول کولای شو چې مثلث ته تر بېنهایت پورې دوام ورکړو، چې که چېرې هغوی د یو دوه جملهیي له انکشاف سره پرتله کړو، لکه: د راکړل شوي پاسکال مثلث عددونه دي، مثلاً پاملرنه وکړئ چې د دوه

جملهيې په انکشاف کې له هغو عددونو څخه مو حلقه تاو کړې ده د مثلث له اعدادو سره چې حلقه ترې تاوشوې ده يو شان ده:

$(a+b)^0 = ①$

$(a+b)^1 = ①a + ①b$

$(a+b)^2 = ①a^2 + ②ab + ①b^2$

$(a+b)^3 = ①a^3 + ③a^2b + ③ab^2 + ①b^3$

$(a+b)^4 = ①a^4 + ④a^3b + ⑥a^2b^2 + ④ab^3 + ①b^3$

①

① ② ①

① ③ ③ ①

① ④ ⑥ ④ ①

چې دغه ضريبونه د $(a+b)^n$ په انکشاف کې n د k له پاسه د ضريبونو استعمال په لاندې ډول ليکلی‌شو:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د " $\sum$ " علامه د پاسنی مجموع لپاره استعمال شوې ده.

په دې ډول د خط راتللو احتمال په k– امه مرتبه کې عبارت دی له: $P(\text{خط راتگ}) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$

پوښتنې

1. د فوټبال په يوه سيالۍ کې 12 ټيمونه ګډون لري، په څو ډوله کولای شو ګټونکي لومړی، دويم او دريم مقام ته وټاکو.
2. د يوولسم ټولګي له 20 تنو زده‌کوونکو څخه په څو ډوله دوه تنه، د ټولګي د استازي او د استازي د مرستيال په توګه وټاکو.

د بینوم قضیه

د پاسکال د مثلث له مخې د بینوم د انکشاف ضریبونه وټاکئ.

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
```

$$(a+b)^2 = \bigcirc a^2 + \bigcirc ab + \bigcirc b^2$$

$$(a+b)^3 = \bigcirc a^3 + \bigcirc a^2b + \bigcirc ab^2 + \bigcirc b^3$$

$$(a+b)^4 = \bigcirc a^4 + \bigcirc a^3b + \bigcirc a^2b^2 + \bigcirc ab^3 + \bigcirc b^4$$

فعالیت

- په یوه ناخاپي تجربه کې چې یوازې دوه ناخاپي پېښې د A او $\overline{A}$ پېښېږي، یعنې د $\{A,\overline{A}\}$ نمونوي فضا لري. د A د پېښې احتمال عبارت دی له:
- که چېرې $P(A)=P$ د A د پېښې احتمال وي، د هغې د مکملې پېښې احتمال یعنې $\overline{A}$ څو دی $P(\overline{A})=?$
- د پورتنی تجربې له بیا بیا تکرار څخه که چېرې د A حادثې پېښېدو ته 1 او د نه پېښېدو حالت ته یې 0 ووایو لاندې جدول د تجربې د بیا بیا تکرار یعنې $n=2$ لپاره بشپړ کړئ.

k	ممکنې پایلې	احتمال	د بینوم د ضریبونو ارایه
0		$(1-p)^2$	$\binom{2}{0}.p^0.(1-p)^2$
1	10	$2p(1-p)$	
2	11		$\binom{2}{2}p^2(1-p)^2$
		$(p+(1-p))^2$	$\sum\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=?$

د $B(n,p,k)$ لیکنه د برنولي د مسالې د احتمال په نامه یادیږي.

$$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

د بینوم د حدونو د انکشاف مجموع یعنې $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ پیدا کړئ؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په یوه ناڅاپي تجربه کې چې د نمونې فضا غړي یې په مساوي احتمال په تجربه کې بیابیا د تکرار وړ وي، نو د تجربې په n ځله تکرار کې د بینوم د انکشاف k – ام حد کې لاندې احتمال لري:

$$\binom{n}{k}.p^{k}(1-p)^{n-k}$$

پورتنی بینوم په $B(n,p,k)$ ښودل کېږي، د برنولي د پرابلم د احتمال په نامه یادېږي او لیکو:

$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$ سره کېږي.

مثال: له n تنو څخه د 10 تنو په شمېر په ناڅاپي ډول ټاکو، د k تنو انتخاب شوو خلکو له جملې څخه 2 تنه ټاکو، پیدا کړئ د دې احتمال چې دواړه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي. $P(k\le n)=?$

حل: په دې ډول د Ω په نمونه‌يي فضا کې داسې فرضوو چې د کال د هرې ورځې احتمال $\frac{1}{365}$ او د زوکړې ورځ د سوال وړ ده نه د زرکړې کال.

په دې ډول Ω په نمونه‌يي فضا کې ټول امکانات له 365 ورځو څخه د k شمېر لپاره عبارت دی له:

د A حادثه

$$|\Omega|=(365)^{k}$$

په دې ډول اوس که چېرې د A ناڅاپي پېښه چې لږترلږه دوه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي، په ساده ډول داسې د محاسبې وړ ده، چې د A د حادثې مکمله په پام کې نیسو، په دې ډول $\bar{A}$ عبارت له هغې ناڅاپي پېښې څخه ده چې k تنه په بېلابېلو ورځو کې زېږېدلي دي. په دې ډول $\bar{A}$ عبارت د k پرموټېشن له 365 څخه ده چې لرو:

$$P(\bar{A})=\binom{365}{k}=\frac{365!}{(365-k)!}$$

په دې ډول:

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{|\bar{A}|}{|\Omega|}=1-\binom{365}{k}=1-\frac{365!}{(365-k)!}\cdot\frac{1}{(365)^{k}}$$

پوښتنې

وښیئ چې:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^{n}\binom{n}{n}=0 \qquad (I)$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^{n} \qquad (II)$$

دوه جمله يي احتمال

آيا کولای شو چې د هرې نمونه‌يي فضا پايلې په دوه ناځاپي پېښو چې له يو بل سره هيڅ ګډ عنصر نه‌لري، ترتيب کړو.
موضوع د سټ د تيوري له مخې په يوه اختياري نمونه‌يي فضا Ω کې، دوه ناځاپي پېښو ته چې اتحاد يې نمونه‌يي فضاوي په مثال کې يې تشريح کړي.

فعاليت

- د هغو تجربو څخه چې تر اوسه يې پېژنئ يا دونه وکړئ او يوه نمونه‌يي فضا د دوه اتفاقي يا ناځاپي پېښو په ارايه چې ټوله نمونه‌يي فضا يې يوازې دوه غړي ولري.
- آيا هغه ناځاپي تجربې چې نمونه‌يي فضاګانې يې له 2 څخه زيات غړي لري. کولای شو په داسې نمونه‌يي فضاګانو واړوو چې يوازې 2 غړي ولري؟ مثال راوړئ.
- په عمومي ډول څنګه کولای شو چې يوه نمونه‌يي فضا چې ډېر غړي لري، په يوه داسې نمونه‌يي فضا چې 2 غړي لري، واړوو؟
- که چېرې د دا ډول فضاګانو د يو غړي د پېښې احتمال p وي، د بلې پېښې د احتمال قيمت به څو وي؟
- که چېرې تجربه n ځلې سرته ورسوو، او د k په شمېر له n ځلې ($0 \le k \le n$) ورل او نور يې بايلل دي و، د k ځلې برياليتوب (P) په n ځلې تکرار کې پيدا کړئ؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: د هرې ناځاپي تجربې نمونه‌يي فضا کولای شو چې په داسې يوې نمونه‌وي فضا واړوو چې دوه غړي ولري.

- که چېرې د دا ډول نمونه‌وي فضا د يو غړي احتمال (P) وي، نو هرو مرو د بل حالت احتمال $1-p$ او بايلل دي.
- که چېرې دا ډول تجربې n ځلې تکرار شي، نو د k – ام ځلې ورل په n ځلې تکرار کې او د بايللو احتمال به $q=1-p$ سره دي، يعني لرو چې:

$$k\text{، – ام ځلې ورل په n ځلې تکرار کې} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

لومړی مثال: پاملرنه وکړئ چې که چېرې په يوه تجربه کې د وړلو احتمال $\frac{1}{2}$ ، د بايللو احتمال هم مساوي په $\frac{1}{2}$ سره وي، په دې ډول ناخاپي پېښو کې پورتنی اړيکه په لاندې ډول حسابېږي:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}.(\frac{1}{2})^k.(1-\frac{1}{2})^{n-k}=\binom{n}{k}.\left(\frac{1}{2}\right)^k.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

پورتنی پايله د يوې تجربې په n ځله تکرار کې چې لـه هغې جملې څخه k ځلې يې وړل وي، يـوې دوه عنصره نمونه‌يي فضا ته وځيږئ؟

دويم مثال: په يوه کورنۍ کې چې 5 ماشومان لري، د دې احتمال چې لـه اولادونـو څخه 2 تنـه هلکـان او پاتې نجونې وي، څو دی؟

حل: که چېرې د اولادونو د هلك او نجلی زوکړې چانس برابر په پام کې ونيسو لرو چې:

څرنګه چې په دې مثال کې $p=\frac{1}{2}$ او $q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ سره دی، نو ليکلای شو:

$$=\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{10}{2^5}=\frac{5}{16}=0.3125=31.25\%$$ د دې احتمال چې دوه هلکان او درې نجونې وي.

دريم مثال: د رمل يوه دانه 6 ځلې غورځوو، د دې احتمال پيداکړئ چې په 4 ځلې غورځيدوکې راغلي خالونه له دريو څخه لږ وي؟

حل: که چېرې له 3 څخه لږ راتلل حالت وړل په پام کې ونيسو نو:

$$p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$$

$$q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0.6666=66.66\%$$

$$\binom{6}{4}.\left(\frac{1}{3}\right)^4.\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{243}=0.0823=8.23\%$$ (د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې له 6 ځلې څخه، خالونه له 3 څخه لږ وي)

څلورم مثال: يوه فلزي سکه داسې جوړه شوې ده چې د خط راتلـو احتمـال يـې مـساوي پـه $\frac{1}{3}$ وي، کـه چېرې دغه سکه 4 ځلې وغورځول شي، د دې احتمال چې لږ تر لږه 3 ځلې شېر راشي، مطلوب دی.

حل: که چېرې د سکې د خط راتللو حالت ته وړل او احتمـال يـې p پـه پـام کې ونيـسو، نـو د خط د نـه راتللو يا شېر راتګ مساوي په $1-p$ سره دی يعنې: $1-p=\frac{1}{3}p$

له دې څخه $p=\frac{3}{4}$ او $q=\frac{1}{4}$ په لاس راځي:

$$\left\langle \text{د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدوکې لږ تر لږه 3 ځله شېر راشي.} \right\rangle = \binom{4}{3}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^{3}}_{\text{3ځلې شېر}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)+\underbrace{\binom{4}{4}}_{\text{1 ځل خط}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^{4}}_{\text{4 ځلې شېر}}=\frac{3}{64}+\frac{1}{256}=\frac{13}{256}$$

پنځم مثال: یوه نورماله سکه څو ځلې وغورځوو چې لږ تر لږه د خط راتلو احتمال یې له 0.99 څخه ډېر وي؟

حل: داسې فرضوو چې سکه n ځلې غورځوو د دې احتمال چې لږتر لږه یو ځل سکه خط راشي مساوي ده په:

د هر n ځلې شیر راتګ احتمال $-1=$ دی لږ تر لږه یو ځل خط راتلو احتمال

$$=1-\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{2^{n}}=1-\frac{1}{2^{n}}$$

په دې ډول ددې شرط $1-\frac{1}{2^{n}}>0.99$ یا $\frac{1}{2^{n}}<0.01$ سره دی چې $2^{n}>100$ یا $n\geq 7$ سره کېږي.

په دې ډول باید سکه 7 ځلې وغورځوو چې لږتر لږه یو ځل خط راشي، احتمال به یې له 0.99 څخه لوی وي.

پوښتنې

یوه سکه څو ځله غورځوو، د دې احتمال پیداکړی چې:

(i): په 4 ځله غورځیدوکې، 2 ځلې خط راشي.

(ii): په 6 ځله غورځیدوکې، 3 ځلې خط راشي

(iii): په 8 ځله غور ځیدوکې، 4 ځلې خط راشي.

(iv): فکر وکړئ چې که سکه 2n ځلې وغورځول شي او n ځلې خط راشي، د n په ډېریدو، د p بدلون په څه ډول دی؟

د څېړکي مهم ټکي

فکتوریل: د هر n طبیعي عدد لپاره د $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ \dots \ \cdot n$ د ضرب حاصل په لنډ ډول په $n!$ (n فکتوریل) ښودل کېږي، د تعریف له مخې $0!=1$ سره دی.

پرموټېشن یا ترتیب: د n غړو ترتیب په p_n ښودل کېږي که چېرې:

- په ترتیب کې تکرار غیر مجاز او ممکن نه وي: $P_n = n!$

خو که چېرې تکرار مجاز وي، د ترتیبونو شمېر مساوي په P_k^n سره ده او داسې معنا ورکوي چې k ځلې په n ځلې ترتیبونو کې تکرار وجود لري. چې د پورتني حالت په پام کې نیولو سره ټول حالتونه مساوي دی په:

$$P_k^n = \frac{n!}{k!} \quad , \quad k \le n$$

د $\binom{n}{k}$، n د k له پاسه: د $\binom{n}{k}$، n د k له پاسه، د بینوم هغه ضریبونه دي چې k د بینوم د توان په ټاکلو سره، د ضریبونو لپاره داسې صورت نیسي:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ ، } n,k \in IN \text{ ، } 0 \le k \le n$$

- له n شیانو څخه د r شیانو ترکیبونه په:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{،} \quad r \le n$$

وریشن یا تبدیلونه: په ترتیبونو کې چې پر له پسې ترتیب د k انتخابي غړو له n غړو څخه مطلوب وي، په نامه دي، n په k تبدیلونو یاد او لیکو:

$$V_k^n = k!\cdot C_k^n = k!\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

دبینوم قضیه: د $(a+b)^n$ دو جملهیي انکشاف عبارت دی له:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

د یوې تجربې په n ځلې تکرار کې، چې هر حالت یې p او د $q=1-p$ احتمال لري.

د $k-$ام ځلې وړلو یعنې p له n ځلې څخه او نور پاتې حالتونه چې بایلل ګڼل کېږي؛یعنې $q=1-p$ سره دي اوصورت نیسي:

$$\left\langle \begin{array}{c}\text{د k ځلې وړلو د احتمال قیمت د تجربې} \\ \text{د n ځلې په پای کې}\end{array} \right\rangle = \binom{n}{k}\cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \text{ ، } 0 \le k \le n$$

د ځېرکي پوښتني

1- د لاندې عددونو سټ په پام کې ونیسئ:

$$S=\{0,1,2,3,4,5,6\}$$

(i): په څو ډوله کولای شو له پاسنیو عددونو څخه 3 رقمي عددونه جوړ کړو.

(ii): ټول 3 رقمي جفت عددونه به څو وي؟

2- په څو ډوله 6 تنه زده‌کوونکي په یوه کتار کې څنګ په څنګ دربېدلی شي؟

3- په څو ډوله ابوبکر، زبیر، یاسر، حنظله او حبیب کولای شي، په یو کتار کې خوا په خوا د یو یادګاري تصویر د اخېستلو لپاره ودرېږي؟

4- په څو ډولونو کولای شو چې 9 تنه په درې 3 ګروپونو ووېشو؟

5- د پاسکال د مثلث له مخې د $(a+b)^7$ انکشاف په لاس راوړئ؟